# 前言

本书是为概率论专业硕博连读生编写的教材，并且已经多届教学的实践. 本书以介绍现代鞅论与随机积分为基本内容，进而讨论 Wiener 过程泛函与扩散过程泛函的结构，最后介绍有应用价值的 Kalman-Bucy 滤波与非线性滤波、内插与外推等内容，作为例子也讨论到随机分析在数理金融中的某些应用.

预备知识：条件期望与离散时间鞅是为读本书打基础的内容，主要介绍测度论基础上的条件期望概念与经典（离散）鞅论基础.

第一章连续时间鞅，是现代鞅论的主要内容，同时介绍过程的可选，可料投影. 简略地介绍测度的投影. 这些都是后续内容的基础.

第二章随机积分，从可料过程对 $L^2$ 鞅的随机积分开始，逐步深入到对一般适应过程的随机积分. 对平方变差过程的介绍，我们只局限于连续局部鞅的情形. 这样做的原因是篇幅与教学时数的限制.

第三章 Ito 公式与 Girsanou 定理，它们是随机分析的重要工具，Girsanou 定理给出的测度鞅变换在现代数理金融学中有重要的意义. 我们在股票市场与等价鞅测度 1 节阐述了这一点，这样可以使读者较早地看到它们的应用.

第四章随机微分方程，讨论了随机微分方程的强解和弱解，以及偏微分方程概率解问题，书中还介绍作者提出的解一类随机微

分方程的方法,最后的一节也是作者本人的成果,它表明 Feynman-Kac 公式不但可以给出热传导方程解的概率表示，而且借助概率的方法还可进一步给出解析解. 而热传导方程的 Cauchy 问题在现代数理金融学的期权定价中有重要的意义,

第五章平方可积鞅与 Wiener 泛函的结构，本章主要讨论平方可积鞅以及局部鞅的随机积分表示，进一步讨论某些 Winner 泛函,扩散过程泛函的结构. §1.5 介绍了获得诺贝尔经济奖的著名的 Black-Scholes 公式，因为它恰恰用到局部鞅表示定理与 Feynman-Kac 公式.

第六章 Ito 过程与扩散过程测度的绝对连续性， Ito 过程，扩散过程， Wiener 过程可在连续函数空间诱导出相应的测度，以 Wiener 测度为基准，本章讨论这些测度关于 Wiener 测度的绝对连续性以及 Radon-Nikydom 导数，为滤波理论奠定基础，也是过程统计的基础.

第七章滤波理论及其它应用，主要介绍一般的非线性滤波理论，同时也讨论到内插，外推问题. 这对一般的数据处理工作者是有应用价值的. 在这里，我们只讨论连续时间的情形，对于应用更实际的是离散时间，此时随机微分方程需用随机差分方程来代替，在这方面已经有许多专著可供参考.

随机分析的内容非常丰富，作为教材，我们只能选择最基础的内容. 由于水平的限制，也由于篇幅的限制，挂一漏万在所难免，敬请各位读者批评指正.

编　者

# 目　　录

# 符　号

$\triangleq$　定义为

$\square$　证明结束

$\mathrm{sgn}(x)$　$x$ 的符号函数

a.e.　关于 Lebesgue 测度的几乎处处

a.s.　关于概率测度的几乎处处

$\mathrm{d}P \times \mathrm{d}\lambda$–a.s.　关于概率与 Lebesgue 测度乘积的几乎处处

$N_0$　自然数集 $N \cup \{0\}$

$\overline{N}_0 = N_0 \cup \{\infty\}$

$Q, Q_+$　有理数，非负有理数集合

$R, R_+$　实数，非负实数集合

$\overline{R}_+ = R_+ \cup \{\infty\}$

$R^d$　$d$ 维实数空间

$C^n$　$n$ 维复数域

$(C_T, B_T)$　$[0,T]$ 上连续函数全体按一致拓扑生成的可测空间

$A^*$　矩阵或向量的转置

$X \in b\mathcal{F}$　$\mathcal{F}$ 可测且有界

$\mathcal{J}(\mathcal{J}_f)$　所论停时 (只取有限多个值) 的全体

$\mathcal{J}_b$　有界停时全体

$\mathcal{F}_\tau$　$\tau$ 前事件的 $\sigma$ 代数 (§1.2)

$\mathcal{F}_{\tau-}$ 严格 $\tau$ 前事件的 $\sigma$ 代数 (1.47)

$\tau_F$　停时 $\tau$ 在 $F$ 上的限制

$[\tau],[\tau,\sigma],(\tau,\sigma]$　停时图，随机区间

$\mathcal{F}_t^\xi$　由过程 $\xi$ 产生的 $\sigma$ 代数

$\mathcal{O}$　可选 $\sigma$ 代数

$\mathcal{P}$　可料 $\sigma$ 代数

$\mathfrak{D}$　循序 $\sigma$ 代数

$\mathcal{S}$　可测的适应过程类

$\mathcal{E}$　简单函数量

$\mathcal{R}$　可料矩形全体 (1.30 定义)

$\sigma(c.),\sigma(r.c.),\sigma(l.c.),\sigma(l.c.r.l.)$　分别表示由适应的连续，右连续，左连续，左连右极过程产生的 $\sigma$ 代数

$\mathfrak{M}^2$　平方可积鞅空间

$\mathfrak{M}^2_T$,　$[0,T]$ 上平方可积鞅 (ch.5)

$\mathfrak{M}^c_{\rm loc}$　连续局部鞅全体

$\mathfrak{M}^2_{\rm loc}$　局部平方可积鞅空间

$\mu_{M^2}$　由右连续 $L^2$ 鞅生成的 Doleans 测度 (§2.2)

$\mathcal{L}^2_M \triangleq L^2(R_+\times\Omega,\mathcal{P},\mu_{M^2})$

$\Lambda^2(\mathcal{W},M)=\left\{X\in\mathcal{W}:\forall t\in R_+,\int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}\mu_{M^2}<\infty\right\}$. 其中 $\mathcal{W}$ 表示某过程类

$X\in\mathcal{L}_{\rm loc}\Longleftrightarrow\forall t,\int_0^t|X_s|\mathrm{d}s<\infty$

$X\in\mathcal{L}^2_{\rm loc}\Longleftrightarrow\forall t,\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s<\infty$

$X\in\mathcal{L}^{2,\rm loc}_M(W)\Longleftrightarrow X\in\mathcal{W}$, 存在 $M$ 的局部化停时列 $\{\tau_k\}$,

使得 $I_{[0,\tau_k]}X \in \Lambda^2(\mathcal{W}, M^k)$

$Z_t(\phi) \triangleq \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\phi^2(s)\,\mathrm{d}s\right\}$ 指数鞅

$C_0^\infty(R)$ $R$ 上具紧支集无穷次可微函数全体

$D(R)$ $C_0^\infty(R)$ 赋以在紧集上各阶导数一致收敛拓扑的线性拓扑空间

$D^*(R)$ $D(R)$ 上连续线性泛函，即广义函数全体 (§3.5)

# 预备知识　条件期望与离散时间鞅

本章的内容是作为预备知识引入的，有些证明可参考文献 [3].

## §0.1　条 件 期 望

条件期望是现代概率论的基础概念，也是鞅论的基础.

由初等概率论知道，如果 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一个概率空间， $A,B\in\mathcal{F}$, 称为是事件，如果 $P(B)>0$, 则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 $B$ 发生条件下的条件概率，条件概率 $P(\cdot|B)$ 仍然是可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度. 设 $\xi$ 为可积的随机变量，我们自然称

$$E(\xi|B)=\int_\Omega \xi\ \mathrm{d}P(\omega|B)$$

为 $\xi$ 关于条件概率 $P(\cdot|B)$ 的条件期望. 容易证明

$$E(\xi|B)=\frac{1}{P(B)}\int_B \xi\,\mathrm{d}P \qquad (0-1)$$

事实上，当 $\xi=I_A(\omega)$ 时，由定义上式左边就是 $P(A|B)$, 而右边恰是 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, 两者相等. 从而易知 $(0-1)$ 式对 $\xi$ 为简单函数是

成立的，由此利用积分的单调收敛定理可知，它对非负可测函数成立，最后得到 (0 − 1) 式对一般的可测函数成立.

记 $\mathcal{G} = \{B, B^c\}$, 是一个 $\sigma$ 代数，我们定义

$$E(\xi|\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} E(\xi|B), & \omega \in B \\ E(\xi|B^c), & \omega \in B^c \end{cases}$$

这样 $E(\xi|\mathcal{G})$ 便是一个 $\mathcal{G}$ 可测随机变量，而且满足

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \int_\Omega E(\xi|\mathcal{G})\,\mathrm{d}P = \int_\Omega \xi\,\mathrm{d}P$$

我们称 $E(\xi|\mathcal{G})$ 为随机变量 $\xi$ 关于 $\sigma$ 代数 $\mathcal{G}$ 的条件期望.

当 $\sigma$ 代数 $\mathcal{G} = \sigma(B_n, n \geqslant 1)$, 其中 $\{B_n : n \geqslant 1\}$ 是 $\Omega$ 的一个可测分割时，我们可知：

$$E(\xi|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(B_n)} \int_{B_n} \xi\,\mathrm{d}P \cdot I_{B_n}(\omega)$$

为随机变量 $\xi$ 关于 $\sigma$ 代数 $\mathcal{G}$ 的条件期望. 进一步的推广就是下面的定义.

**0.1定义** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma$ 代数 (也即 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 代数，且 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$),$\xi$ 为数学期望存在的随机变量，一个 $\mathcal{G}$ 可测随机变量 $\eta$ 如果满足：

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \int_A \eta\,\mathrm{d}P = \int_A \xi\,\mathrm{d}P \qquad (0-2)$$

则称 $\eta$ 为 $\xi$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望. 当 $\xi = I_A(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, 则称 $E(\xi|\mathcal{G})$ 为 $A$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件概率，并记为 $P(A|\mathcal{G})$.

Radon-Nikodym 定理保证了上述条件期望 $\eta$ 的存在性. 事实上，对任意的 $A \in \mathcal{G}$,

$$\nu(A) = \int_A \xi \, \mathrm{d}P$$

是 $\mathcal{G}$ 上的符号测度，且关于 $P$ 绝对连续. 因此由 Radon-Nikodym 定理，存在 Radon-Nikodym 导数 $\eta = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}P}$. 于是 $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$\int_\Omega \eta \, \mathrm{d}P = \nu(A) = \int_\Omega \xi \, \mathrm{d}P$$

由定义看出条件期望 $E(\xi|\mathcal{G})$ 实际上是随机变量 $\xi$ 在 $\mathcal{G}$ 的每个可测子集上按概率测度的平均 (称之为平滑性). 特别当 $\mathcal{G} = \sigma(\eta), \eta$ 为随机变量，则记 $E(\xi|\mathcal{G}) = E(\xi|\eta)$. 容易看出，条件期望是几乎处处确定的，因此有关条件期望的性质也是 a.s. 成立的.

条件期望具有下面的性质:

**0.2定理**

(1)$E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{G}) = \alpha E(\xi|\mathcal{G}) + \beta E(\eta|\mathcal{G})$ 式中 $\alpha, \beta \in R$, 且假定 $E(\alpha\xi + \beta\eta)$ 存在.

(2)$E[E(\xi|\mathcal{G})] = E(\xi)$

(3) 若 $\xi$ 为 $\mathcal{G}$ 可测，则 $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$.

(4) 若 $\xi$ 与 $\sigma$ 代数独立，则

$$E(\xi|\mathcal{G}) = E(\xi)$$

(5) 若 $\mathcal{G}_1$ 是 $\sigma$ 代数 $\mathcal{G}$ 的子 $\sigma$ 代数，则

$$E(E(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = E(\xi|\mathcal{G}_1) \qquad (0-3)$$

(6)(Jensen 不等式) 若 $f$ 是 $R$ 上的下凸函数，则

$$f(E(\xi|\mathcal{G})) \leqslant E(f(\xi)|\mathcal{G}) \qquad (0-4)$$

**0.3条件期望的极限定理**

(1) 条件期望的单调收敛定理：若 $\xi_n \uparrow \xi$ a.s., 且 $E\xi$ 存在，则在 $\{E(\xi|\mathcal{G}) > -\infty\}$ 上,

$$E(\xi|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \qquad (0-5)$$

类似地，若 $\xi_n \downarrow \xi$ a.s., 且 $E\xi$ 存在，则在 $\{E(\xi|\mathcal{G}) < \infty\}$ 上,

$$E(\xi|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \qquad (0-6)$$

(2) 条件期望的 Fatou 引理：若 $\xi_n \leqslant \xi_1$ a.s., 且 $E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n\right)$ 存在，则在 $\{E(\xi_1|\mathcal{G}) < \infty\}$ 上,

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n|\mathcal{G}\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E(\xi_n|\mathcal{G}) \qquad (0-7)$$

类似地，若 $\xi_n \geqslant \xi_1$a.s., 且 $E(\lim_{n\to\infty} \xi_n)$ 存在，则在 $\{E(\xi_1|\mathcal{G}) > -\infty\}$ 上,

$$E(\lim_{n\to\infty} \xi_n|\mathcal{G}) \leqslant \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \qquad (0-8)$$

(3) 条件期望的控制收敛定理：若 $|\xi_n| \leqslant \xi_1$ a.s., $\xi_1$ 可积，且 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.or}P} \xi$, 则在 $\{E(\xi_1|\mathcal{G}) < \infty\}$ 上,

$$\lim_{n\to\infty} E(|\xi_n - \xi||\mathcal{G}) = 0 \qquad (0-9)$$

**0.4定义** 称随机变量族 $\mathcal{U}$ 为**一致可积族** (简记为 u.i.) 是指,

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\xi\in\mathcal{U}} \int_{|\xi|>c} |\xi| \mathrm{d}P = 0$$

显然，如果对某个 $r>1, \sup_{\xi\in\mathcal{U}} E|\xi|^r<\infty$, 则 $\mathcal{U}$ 为一致可积族.

可以证明，$\mathcal{U}$ 为一致可积族的充要条件是：

(1)$\sup_{\xi\in\mathcal{U}} E|\xi|<\infty$;

(2)$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 对一切满足 $P(A)<\delta$, 有

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}\int_A|\xi|\mathrm{d}P<\epsilon$$

应用一致可积性，我们可将 Fatou 引理推广.

**0.5推广的 Fatou 引理**

(1) 若 $\{X_n^+\}$u.i. 且 $E\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}X_n\right)$ 存在，则

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}EX_n \tag{0-10}$$

(2) 若 $\{X_n^-\}$u.i. 且 $E\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}X_n\right)$ 存在，则

$$E\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}EX_n \tag{0-11}$$

**证明** 我们只证 (1). 如 $X_n\leqslant a<\infty$, 则由通常的 Fatou 引理知，(0-10) 式成立. 对于一般情形，取 $a>0$, 由于

$$EX_n-E(X_n\wedge a)=\int_{X_n>a}(X_n-a)\leqslant\int_{X_n^+>a}X_n^+\,\mathrm{d}P$$

由 $\{X_n^+\}$u.i., 对 $\epsilon>0$, 取 $a$ 充分大，可使上式右端对 $n$ 一致地小于 $\epsilon$. 因而

$$\forall n\in N_0, E(X_n\wedge a)\geqslant EX_n-\epsilon$$

于是

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right) \geqslant E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}(X_n\wedge a)\right)$$
$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}E(X_n\wedge a) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}EX_n - \epsilon$$

由 $\epsilon$ 的任意性，定理得证. □

注意！有反例表明对条件期望没有相应的定理.

由此得到

**0.6定理** 设 $0 \leqslant X_n \to X$, 且 $\forall n, EX_n < \infty$, 则 $EX_n \to EX \iff \{X_n\}$, u.i..

**证明** 充分性：对 $X_n$ 及 $-X_n$ 应用推广的 Fatou 引理，得

$$EX \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} EX_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}EX_n \leqslant EX$$

由 $\{X_n\}$, u.i.., 可得 $E|X| < \infty$, 所以 $EX = \lim\limits_{n\to\infty} EX_n$.

必要性： $\forall m \in N_0, \{B : P(X = b) \geqslant m^{-1}\}$ 为有限集，故 $B = \{b : P(X = b) > 0\}$ 为至多可列集. $\forall a \notin B$, 有 $X_n I_{(X_n<a)} \to XI_{(X<a)}$. 显然 $\{X_n I_{(X_n<a)}\}$ 仍是一致可积，从而由充分性的证明，

$$\int_{(X_n<a)} X_n \mathrm{d}P \to \int_{(X<a)} X \mathrm{d}P$$

于是对 $a \notin B$, $\int_{(X_n\geqslant a)} X_n \,\mathrm{d}P \to \int_{(X\geqslant a)} X\mathrm{d}P$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 选 $a_0 \notin B$ 且充分大，使得 $\int_{X\geqslant a_0} X < \epsilon/2$, 再令 $N_0$ 充分大，使得 $\forall n \geqslant N_0$, 有

$$\int_{(X_n\geqslant a_0)} X_n \,\mathrm{d}P \leqslant \int_{(X\geqslant a_0)} X \,\mathrm{d}P + \epsilon/2$$

而对有限个 $n \leqslant N_0$, 取 $a_1 \geqslant a_0$, 可使 $\int_{(X_n \geqslant a_1)} X_n \, \mathrm{d}P < \epsilon$. 这样对一切 $a \geqslant a_1, 0 \leqslant \int_{X_n \geqslant a} X_n \, \mathrm{d}P < \epsilon$, $\{X_n\}$ 的一致可积性得证.

□

应用最多的是

**0.7推论** 若 $X_n \to X$, 且 $(X_n)$u.i., 则 $E|X_n - X| \to 0$.

设 $p \geqslant 1$, 称随机变量族 $(\xi_\alpha), \alpha \in R_+$, 属于 $L^p$, 是指 $\forall \alpha \in T, E|\xi|^p < \infty$. 如果 $\sup_\alpha E|\xi|^p < \infty$, 则称它为 $L^p$ 有界的, 如果存在随机变量 $\xi$, 使得 $\lim\limits_{\alpha \to \infty} E|\xi_\alpha - \xi|^p = 0$, 则称 $(\xi_\alpha)$ 是 $L^p$ 收敛的, 并记为 $\xi_\alpha \xrightarrow{L^p} \xi$.

**0.8$L^1$ 收敛原理** 设 $(\xi_n)$ 为可积随机变量序列, $\xi$ 为随机变量, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 或 $X_n \xrightarrow{\text{a.s}} \xi$ 则下列条件等价:

(1)$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$

(2)$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 且 $(\xi_n) \xrightarrow{\text{u.i.}} \xi$

(3)$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 且 $E|\xi_n| \to E|\xi| < \infty$.

**证明** 见文献 [3]p189 定理 5.4. □

为了下面讨论 $L^p$ 鞅的需要, 我们还有

**0.9$L^p$ 收敛原理** 设 $p \geqslant 1, L^p$ 序列依概率或 a.s. 收敛到随机变量 $X$ 则下列事实等价:

(1) $X_n \xrightarrow{L^p} X$;

(2)$\{|X_n|^p\}$ 一致可积;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} E(|X_n|^p) = E(|X|^p)$.

进而, 如果下列条件之一满足, 则上述的 (1)→(3) 成立:

(1) $\sup_n E(|X_n|^q) < \infty$, $q$ 某个 $p < q < \infty$;

(2) 存在 $Y \in L^p$, 使得 $\forall n \in N_0, |X_n| \leqslant Y$.

**证明** 定理的前一部分是 $L^1$ 收敛原理的推论. 而后一部分两个条件均可导出 $\{|X_n|^p\}$ 一致可积. □

在条件期望定义 0.1 中, 我们只要求 $E\xi$ 存在, 这样的条件期望 $E(\xi|\mathcal{G})$ 只是 $\mathcal{G}$ 可测函数, 可以取无穷为值. 但由 Ridon-Nikydom 定理, 如果 $\forall A \in \mathcal{G}, \nu(A) = \int_A \xi \, \mathrm{d}P$ 为 $\sigma$ 有限, 则所定义的条件期望 $E(\xi|\mathcal{G})$ 便 a.s. 有限. 我们称 $\xi$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 可积, 如果存在 $\Omega_n \in \mathcal{G}, \Omega_n \uparrow \Omega$, 使得 $E|\xi|I_{\Omega_n} < \infty$. 这等价于上述的 $\nu(A)$ 为 $\sigma$ 有限, 因此条件期望 $E(\xi|\mathcal{G})$a.s. 有限. 对于这样的条件期望, 定理 0.2 仍然成立. 此外, 读者还可证明 (参考文献 [1] 之 1.19 ).

**0.10定理** 设随机变量 $\xi_n \geqslant 0, n \geqslant 1$, 关于 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 可积.

(1) 若 $\xi_n \uparrow \xi$, 则 $\xi$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 可积当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) < \infty$, 且有

$$E(\xi|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \text{ a.s.} \tag{0-12}$$

(2) 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 可积, 则

$$\varliminf_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \geqslant E(\varliminf_{n\to\infty} \xi_n|\mathcal{G})\text{a.s.} \tag{0-13}$$

**0.11定理** 设 $\xi$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 可积, $\eta \in \mathcal{G}$ 为 a.s. 有限, 则 $\xi\eta$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ 可积, 且

$$E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G}) \tag{0-14}$$

**0.12定理 (Bayes 法则)** 设 $Q$ 是与 $P$ 等价的概率测度, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma$ 代数, $X$ 是 $Q$ 可积随机变量, 则

$$E_Q(X|\mathcal{G}) = \frac{E\left(X\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|\mathcal{G}\right)}{E\left(\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|\mathcal{G}\right)} \tag{0-15}$$

这里 $E_Q(X|\mathcal{G})$, 表示关于概率测度 $Q$ 的条件期望.

**证明**　为方便计，令

$$\xi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}, \quad \eta = E(\xi|\mathcal{G})$$

容易验证 $\eta > 0$ a.s.，对任意的 $A \in \mathcal{G}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_A X\xi \mathrm{d}P &= \int_A X\,\mathrm{d}Q \\
&= \int_A E_Q(X|\mathcal{G})\,\mathrm{d}Q \\
&= \int_A E_Q(X|\mathcal{G})\xi\,\mathrm{d}P \\
&= \int_A E_Q(X|\mathcal{G})\eta\,\mathrm{d}P
\end{aligned}$$

$(1-22)$ 式得证. □

下面的定理将在 §4.2 中用到.

**0.13定理**　设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma$ 代数，$g(x,y)$ 为二元 Borel 可测函数，使得下面的 $(0-16)$ 式有意义，而 $X$ 为 $\mathcal{G}$ 可测随机变量. 那么对于任意的随机变量 $Y$, 我们有

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}] = E[g(x,Y)|\mathcal{G}]\big|_{x=X} \qquad (0-16)$$

特别，如果 $Y$ 与 $\mathcal{G}$ 独立，则

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}] = E[g(x,Y)]\big|_{x=X}$$

**证明**　如果 $g(X,Y) = I_A(x)I_B(y)$, 则由定理 0.2 之 (3), 易知 $(0-16)$ 成立. 利用乘积空间的构造以及二元可测函数的结构，由通常的单调类方法便可得证. □

## §0.2 离散时间鞅

鞅论是近代概率论的基础，鞅 (Martinggale) 的法文含义是倍赌策略，含有公平赌博的意思.

离散时间的鞅论也称经典鞅论.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的单调上升子 $\sigma$ 代数列，称可测函数序列 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 为 **适应 (可测)** 的，如 $\forall n, X_n$ 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测 (记为 $X_n \in \mathcal{F}_n$). 对于适应可测序列我们写为 $(X_n, \mathcal{F}_n), n \geqslant 0$. 如果 $\forall n, X_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, 则称 $X_n$ 是 **可料** 的.

**0.14定义** 称 $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 为 **鞅 (上鞅，下鞅)**，如果 $\forall n, X_n$ 可积，且

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \quad (\text{相应地} \leqslant X_n, \geqslant X_n) \qquad (0-17)$$

当 $n$ 增大时，对于鞅，$EX_n$ 不变；对于上鞅，$EX_n$ 下降，而对于下鞅，$EX_n$ 上升.

在明确了 $\sigma$ 代数列 $(\mathcal{F}_n)$ 的前提下，我们在提到鞅或上鞅时，也可省去 $\mathcal{F}_n$. 设 $\xi$ 是一个可积随机变量，则易知 $X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$ 为鞅，称它为 Doob **鞅**.

如果鞅 (上鞅、下鞅) 序列 $(X_n)$ 具有一致可积性，则称它为**一致可积鞅 (上鞅、下鞅)**.

若 $X$ 为上鞅，则 $-X$ 为下鞅. 下面我们只需讨论下鞅的有关性质.

利用条件期望的线性性，保序性以及 Jensen 不等式不难证明

**0.15定理**

(1) 设 $(X_n), (Y_n)$ 为鞅 (上鞅)，则 $(X_n + Y_n)$ 为鞅 (上鞅)，$(X_n \wedge Y_n)$ 为上鞅;

(2) 设 $(X_n)$ 为鞅或下鞅， $f$ 为 $R$ 上连续 (连续非降) 下凸函数，如每个 $f(X_n)$ 可积，则 $(f(X_n))$ 为下鞅;

(3) 设 $(X_n)$ 为上鞅， $f$ 为非降凹函数，每个 $f(X_n)$ 可积，则 $(f(X_n))$ 为上鞅.

因此，如 $(X_n)$ 为鞅，则 $(X_n^+),(X_n^-),(|X_n|),(|X_n|^\lambda)(\lambda>1)$ 均为下鞅.

**0.16定义** 记 $\overline{N}_0=\{0,1,2,\cdots\infty\}$, 随机变量 $T:\Omega\to\overline{N}_0$, 如果 $\forall n\in\overline{N}_0,\{\omega:T\leqslant n\}\in\mathcal{F}_n$, 则称 $T$ 为 **停时**. 并称

$$\mathcal{F}_T\triangleq\{A\in\mathcal{F}_\infty:A\cap(T=n)\in\mathcal{F}_n\}$$

为 $T$ 前事件 $\sigma$ 代数.

下面的定理可直接由定义来证明. (文献 [3]pp208 定理 8.4,8.5)

**0.17定理** 设 $S,T$ 为停时， $(S_n)$ 为停时列，则

(1)$\bigwedge_n S_n,\bigvee_n S_n$ 为停时;

(2)$\forall A\in\mathcal{F}_S\Longrightarrow A\cap(S\leqslant T)\in\mathcal{F}_T,A\cap(S=T)\in\mathcal{F}_T$.

(3)$S\leqslant T,\Longrightarrow\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_T$;

(4) 设 $A\in\mathcal{F}_S$,则称为是 $S$ 在 $A$ 上的限制 $S_A\triangleq SI_A+(\infty)I_{A^c}$ 为停时，且 $\mathcal{F}_{S_A}\cap A=\mathcal{F}_S\cap A$.

(5) 如果 $(X_n,\mathcal{F}_n)$ 为适应序列，则 $X_TI_{T<\infty}\in\mathcal{F}_T$.

鞅论的一个重要结果是 Doob 停止定理，也即鞅的性质对随机时间的保持性.

**0.18 Doob 停止定理** 设 $(X_n)$ 为鞅 (上鞅)， $S,T$ 为有界停时， $S\leqslant T$, 则

$$E(X_T|\mathcal{F}_S)=X_s(\leqslant X_S)$$

**证明** 只证上鞅情形. 设 $T\leqslant n$, 则由 $|X_T|\leqslant\sum_{j=1}^n|X_j|$, 可

积，同理 $X_S$ 可积. 令 $A\in\mathcal{F}_S, j\geqslant 0$, 则

$$A_j \triangleq A\cap(S=j)\cap(T>j)\in\mathcal{F}_j$$

首先假定 $T-S\leqslant 1$, 此时由上鞅性,

$$\int_A (X_S-X_T)\,\mathrm{d}P=\sum_{j=0}^{n}\int_{A_j}(X_j-X_{j+1})\,\mathrm{d}P\geqslant 0$$

对一般情形，令 $R_j=T\wedge(S+j), 1\leqslant j\leqslant n$, 则每个 $R_j$ 为停时，且 $S\leqslant R_1\leqslant\cdots\leqslant R_n$, $R_1-S\leqslant 1, R_{j+1}-R_j\leqslant 1, (1\leqslant j\leqslant n-1)$. $\forall A\in\mathcal{F}_S$, 则 $A\in\mathcal{F}_{R_j}$, 由上面的结果,

$$\int_A X_S\,\mathrm{d}P\geqslant\int_A X_{R_1}\,\mathrm{d}P\geqslant\cdots\geqslant\int_A X_T\,\mathrm{d}P$$

而 $X_S\in\mathcal{F}_S$, 所以 $E(X_T|\mathcal{F}_S)\leqslant X_S$. □

下面是鞅的基本不等式.

**0.19 定理** 设 $(X_n)_{n\leqslant k}$ 为上鞅，则对任意的 $\lambda>0$, 有

(1) $\lambda P\left(\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda\right)\leqslant EX_0-\int_{(\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda)}X_k\,\mathrm{d}P$ (0-18)

(2) $\lambda P\left(\inf_{n\leqslant k}X_n\leqslant-\lambda\right)\leqslant\int_{(\inf_{n\leqslant k}X_n-\lambda)}(-X_k)\,\mathrm{d}P$ (0-19)

(3) $\lambda P\left(\sup_{n\leqslant k}|X_n|\geqslant\lambda\right)\leqslant EX_0+2EX_k^-$ (0-20)

**证明** 令 $T=\inf\{n\geqslant 0: X_n\geqslant\lambda\}\wedge k$, 则 $T$ 为有界停时，且在 $\{\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda\}$ 上有 $X_T\geqslant\lambda$, 而在 $\{\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda\}$ 上有 $T=k$. 于是由 Doob 定理 (0.18) 有

$$\begin{aligned}EX_0&\geqslant EX_T\\&=\int_{(\sup_{n\leqslant k}X_n\geqslant\lambda)}X_T\,\mathrm{d}P+\int_{(\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda)}X_T\,\mathrm{d}P\\&\geqslant\lambda P\left(\sup_{n\geqslant k}X_n\geqslant\lambda\right)+\int_{(\sup_{n\leqslant k}X_n<\lambda)}X_k\,\mathrm{d}P\end{aligned}$$

此即 (0 − 18) 式，类似地可证 (0 − 19) 式，两者结合则得 (0 − 20) 式. □

下面是关于极大值的不等式，令 $X_k^* = \sup_{n\leqslant k}|X_n|$.

**0.20 定理 (极大不等式)** 设 $(X_n)_{n\leqslant k}$ 为鞅或非负下鞅，则有

(1) $\forall\lambda > 0, p \geqslant 1$, 有

$$P\left(X_k^* \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^p} E\left(|X_k|^p\right) \tag{0-21}$$

(2) $\forall p > 1$, 有 Doob 不等式

$$\|X_k^*\|_p \leqslant q\|X_k\|_p,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{0-22}$$

**证明** 对下鞅 $(|X_n|^p, n \leqslant k)$ 及上鞅 $(-|X_n|^p, n \leqslant k)$ 应用不等式 (0 − 20), 则得 (0 − 21) 式. 往证 (0 − 22) 式. 设 $\phi$ 为 $R_+$ 上右连续增函数，且 $\phi(0) = 0$, 由 Fubini 定理及 (0 − 19) 式,

$$\begin{aligned}
E\phi(X_k^*) &= E\int_{[0,X_k^*]} \mathrm{d}\phi(\lambda) = E\int_0^\infty I_{[0\leqslant\lambda\leqslant X_k^*]}\mathrm{d}\phi(\lambda) \\
&= \int_0^\infty P\left(X_k^* \geqslant \lambda\right)\mathrm{d}\phi(\lambda) \\
&\leqslant \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda}\int_{X_k^*\geqslant\lambda} |X_k|\mathrm{d}P\right)\mathrm{d}\phi(\lambda) \\
&= E\left(|X_k|\int_0^{X_k^*} \lambda^{-1}\,\mathrm{d}\phi(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

在上式中令 $\phi(\lambda) = \lambda^p, p > 1$, 则由上式及 Holder 不等式,

$$E(X_k^*)^p \leqslant \frac{p}{p-1} E|X_k|(X_k^*)^{p-1}$$

$$\frac{p}{p-1}\left(E|X_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(E(X_k^*)^p\right)^{\frac{p}{p-1}} \tag{0-23}$$

由于 $(|X_n|^p, n \leqslant k)$ 为下鞅，有

$$\|X_k^*\|_p \leqslant \sum_{n=0}^{k} \|X_n\|_p \leqslant (k+1)\|X_k\|_p < \infty$$

在 (0 − 23) 式两端乘以 $(E\,(X_k^*)^p)^{(1-p)/p}$, 则得

$$\|X_k^*\|_p \leqslant q\|X_k\|_p$$ □

下面将要证明的上穿不等式是讨论鞅收敛性的工具. 令 $[a,b]$ 为闭区间，定义

$$\begin{aligned} T_0 &= \inf\{n \geqslant 0 : X_n \leqslant a\}, \\ T_1 &= \inf\{n > T_0 : X_n > b\} \\ T_{2j} &= \inf\{n \geqslant T_{2j-1} : X_n \leqslant a\}, \\ T_{2j+1} &= \inf\{n > T_{2j} : X_n > b\} \end{aligned}$$

则 $(T_j)$ 为停时列， $U_a^b(X,k)$ 表示 $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$ 上穿 $[a,b]$ 的次数，则

$$(U_a^b(X,k) = j) = (T_{2j-1} \leqslant k \leqslant T_{2j+1}) \in \mathcal{F}_k$$

**0.21 定理** 设 $(X_n)_{n\leqslant N}$ 为上鞅，则

$$EU_a^b(X,N) \leqslant \frac{1}{b-a} E\,(X_N - a)^-$$

**证明** 由 Doob 停止定理，

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant E(X_{T_{2k+1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N}) \\ &= E(X_{T_{2k+1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N})(I_{(T_{2k}\leqslant N<T_{2k+1})} + I_{(N\geqslant T_{2k})}) \\ &\geqslant E((X_N - a)I_{(T_{2k}\leqslant N<T_{2k+1})} + (b-a)I_{(N\geqslant T_{2k+1})}) \end{aligned} \tag{0-24}$$

由于 $(U_a^b(X,N) \geqslant k+1) \subseteq (N \geqslant T_{2k+1})$, 以及 $(T_{2k} \leqslant N < T_{2k+1}) \subseteq (U_a^b(X,N)=k)$, 由 $(0-24)$ 式得

$$P(U_a^b(X,N) \geqslant k+1) \leqslant \frac{1}{b-a} E\left((X_N-a)^- I_{(U_a^b(X,N)=k)}\right)$$

对 $k$ 求和, 得到

$$\begin{aligned} EU_a^b(X,N) &= \sum_{k=0}^{N} P(U_a^b(X,N) \geqslant k+1) \\ &\leqslant \frac{1}{b-a} E(X_N-a)^- \end{aligned}$$

定理得证 □

下面就是鞅收敛定理.

**0.22 定理** 设 $(X_n)$ 为上鞅, 如 $\sup_n EX_n^- < \infty$(它等价于 $\sup E|X_n| < \infty$), 则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$,a.s., $X_\infty$ 可积; 若 $(X_n)$ 为非负上鞅, 则

$$E(X_\infty|\mathcal{F}_n) \leqslant X_n \qquad (0-25)$$

**证明** 令 $Q$ 表示有理数全体, $U_a^b(X)$ 表示序列 $(X_n), n \in N_0$ 上穿 $[a,b]$ 次数, 则 $U_a^b(X) = \lim\limits_{N\to\infty} U_a^b(X,N)$. 由定理 0.21,

$$\begin{aligned} EU_a^b(X) &\leqslant \frac{1}{b-a} \sup_N E(X_N-a)^- \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}(|a| + \sup_N EX_N^-) < \infty \end{aligned}$$

于是 $U_a^b(X) < \infty$,a.s.. 令 $W_{a,b} = \{\omega : \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n < a < b < \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n\}$, $W = \cup_{a,b\in Q, a<b} W_{a,b}$ 由于 $W_{a,b} \subseteq \{\omega : U_a^b(X) = \infty\}$, 故

$P(W_{a,b})=0$, 从而 $P(W)=0$. 令

$$X_\infty(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{当极限存在}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则由 Fatou 引理

$$E|X_\infty| \leqslant \sup E|X_n| < \infty$$

当 $X_n$ 非负时，由 $E(X_m|\mathcal{F}_n) \leqslant X_n, m > n$ 及 Fatou 引理得到

$$E(X_\infty|\mathcal{F}_n) \leqslant \underline{\lim}_{m\to\infty} E(X_m|\mathcal{F}_n) \leqslant X_n$$

□

**0.23 定理** 设 $(X_n)$ 为一致可积的上鞅 (鞅)，则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} X_\infty$, 而且

$$E(X_\infty|\mathcal{F}_n) \leqslant X_n (= X_n) \tag{0 - 26}$$

**证明** 由 $(X_n)$u.i.,$\sup E|X_n| < \infty$, 从而有 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$, 再由 $(X_n)$ 的 u.i., $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$. 对 $m > n$, 有 $E(X_m|\mathcal{F}_n) \leqslant X_n$, 此时不能直接用 Fatou 引理，但可证 $\forall A \in \mathcal{F}_n, \int_A X_\infty \,\mathrm{d}P \leqslant \int_A X_n \,\mathrm{d}P$. 由于 $(I_A X_m)$,u.i., 又 $I_A X_m \xrightarrow{L^1} I_A X_\infty$, 从而

$$\int_A X_\infty \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \int_A X_m \,\mathrm{d}P \leqslant \int_A X_n \,\mathrm{d}P.$$

□

**0.24 定理** 设 $\xi$ 为一可积的随机变量, 令 $X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n), Y = E(\xi|\mathcal{F}_\infty)$, 则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} Y$.

**证明** 由于 $(X_n)$,u.i., 故由定理 0.22 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.},L^1} \eta$, 往证 $Y=\eta$. 显然 $\eta \in \mathcal{F}_\infty$, 只要证 $\forall A \in \mathcal{F}_\infty, \int_A \eta \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P$. 注意到 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n), \forall A \in \mathcal{F}_n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_A \eta \, \mathrm{d}P &= \lim_{n\to\infty} \int_A X_n \, \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \int_A E(\xi|\mathcal{F}_n) \, \mathrm{d}P \\ &= \int_A \xi \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P \end{aligned} \qquad (0-27)$$

注意到 $E|Y| < \infty, E|\eta| < \infty$, 故 (0 − 27) 式两端都定义了 $\mathcal{F}_\infty$ 上的有限测度, 它们在每个 $\mathcal{F}_n$ 上相等, 因而在 $\mathcal{F}_\infty$ 上相等, 即 $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$,

$$\int_A \eta \, \mathrm{d}P = \int_A X \, \mathrm{d}P$$

所以 $\eta = Y$, 此即 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.},L^1} Y$. □

设 $(X_n), n \in N_0$ 为鞅 (或上鞅), 如存在可积的随机变量 $X_\infty$, 使得对一切 $n \in N_0$, 有 $E(X_\infty|\mathcal{F}_n) = (\leqslant) X_n$, 则称 $(X_n, n \in \overline{N}_0)$ 为 **右闭鞅 (或右闭上鞅)**.

**0.25 定理** 设 $(X_n, n \in \overline{N}_0)$ 为鞅 (上鞅), $S, T$ 为两个停时, $S \leqslant T$, 则 $X_T, X_S$ 可积, 且

$$E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S \ (\leqslant X_S)$$

**证明** 只对上鞅情形给出证明. 为此只要证对任意的停时 $T$, 有

$$X_T \geqslant E(X_\infty|\mathcal{F}_T)$$

为此只要证

$$X_T I_{(T=n)} \geqslant E(X_\infty|\mathcal{F}_T) I_{(T=n)}$$

注意 $\mathcal{F}_T$ 是一个整体，决没有在 $(T=n)$ 上， $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_n$ 之说. 我们有

$$X_T I_{(T=n)} \geqslant E\,(X_\infty|\mathcal{F}_n) I_{(T=n)}$$

所以我们要证明

$$E\,(X_\infty|\mathcal{F}_T) I_{(T=n)} \leqslant E\,(X_\infty|\mathcal{F}_n) I_{(T=n)}$$

设 $A\in\mathcal{F}_T$, 则 $A\cap(T=n)\in\mathcal{F}_n$,

$$\begin{aligned}
\int_A I_{(T=n)} E\,(X_\infty|\mathcal{F}_T)\,\mathrm{d}P &= \int_{A\cap(T=n)} E\,(X_\infty|\mathcal{F}_T)\,\mathrm{d}P \\
&= \int_A I_{(T=n)} E\,(X_\infty|\mathcal{F}_T)\,\mathrm{d}P \\
&= \int_A X_\infty I_{(T=n)}\,\mathrm{d}P \\
&= \int_{A\cap(T=n)} E\,(X_\infty|\mathcal{F}_n)\,\mathrm{d}P \\
&= \int_A I_{(T=n)} E\,(X_\infty|\mathcal{F}_n)\,\mathrm{d}P
\end{aligned}$$

注意到被积函数均为 $\mathcal{F}_T$ 可测， $A\in\mathcal{F}_T$, 所以

$$E\,(X_\infty|\mathcal{F}_T) I_{(T=n)} \leqslant E(X_\infty|\mathcal{F}_n) I_{(T=n)}$$

□

设 $E\,|\xi|<\infty$, 则 $X_n=E\,(\xi|\mathcal{F}_n)$ 为鞅，称它为 Doob 鞅. 我们把上式结果归纳为下述两个定理，其证明留给读者.

**0.26系** 设 $X=(X_n), n\in N_0$ 为鞅，则下列命题等价：

(1) $X$ 为 Doob 鞅;

(2) $X$ 为一致可积鞅;

(3) $X$ 为 $L^1$ 收敛鞅;

(4) $X$ 为右闭鞅;

(5) $X$ 为 Doob 停止定理成立的鞅.

**0.27系** 设 $X=(X_n), n\in N_0$ 为上鞅, 则下面的命题等价:

(1) $X$ 为控制一个 Doob 鞅的上鞅, 即 $X_n \geqslant E(\xi|\mathcal{F}_n), E|\xi|<\infty$;

(2) $(X_n^-)$ 一致可积;

(3) $X$ 右闭;

(4) $X$ 为 Doob 停止定理成立的上鞅.

现在研究 **反向上鞅**, 即以 $-N_0=\{\cdots,-2,-1,0\}$ 为参数的上鞅, 我们仍设 $\mathcal{F}_{n-1}\subseteq\mathcal{F}_n, n\in -N_0$.

**0.28定理** 设 $(X_n), n\in -N_0$ 为上鞅, 则 $\lim_{n\to-\infty}X_n$ 恒存在, 如 $\lim_{n\to-\infty}EX_n<\infty$, 则 $(X_n), n\in -N_0$,u.i., 且 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.},L^1} X_{-\infty}$.

**证明** 我们用 $U_a^b(X,-N_0)$ 表示 $(X_{-N},X_{-N+1},\cdots,X_0)$ 上穿 $[a,b]$ 的次数, 则由上穿不等式,

$$EU_a^b(X)\leqslant EU_a^b(X,-N_0)\leqslant\frac{1}{b-a}E(X_0-a)^-<\infty$$

因此 $\lim\limits_{n\to-\infty}X_n=X_{-\infty}$, a.s.. 当 $n\to-\infty$ 时, $EX_n\uparrow A(>-\infty)$, 假定 $A<\infty$, 往证 $(X_n, n\in -N_0)$,u.i.. 由于 $\{E(X_0|\mathcal{F}_n): n\in -N_0\}$,u.i., 只需证 $\{X_n-E(X_0|\mathcal{F}_n)\}$ 为一致可积上鞅, 这里 $X_n-E(X_0|\mathcal{F}_n)\geqslant 0$, 因此只需对非负上鞅 $(X_n), n\in -N_0$ 证明其一致可积性. $\forall\epsilon>0$, 取足够大的自然数 $k$, 使得 $A-EX_{-k}\leqslant\epsilon/2$.

对 $c>0$, 及 $n<-k$, 由上鞅性,

$$\begin{aligned}\int_{X_n>c} X_n\,\mathrm{d}P &= E(X_n) - \int_{X_n\leqslant c} X_n\,\mathrm{d}P \\ &\leqslant EX_n - \int_{X_n\leqslant c} X_{-k}\,\mathrm{d}P \\ &= EX_n - EX_{-k} + \int_{X_n>c} X_{-k}\,\mathrm{d}P\end{aligned}$$

由于 $A \geqslant EX_n \geqslant EX_{-k}$, 故对 $n \leqslant -k, EX_n - EX_{-k} < \epsilon/2$. 另一方面, 由 $P(X_n > c) \leqslant c^{-1}EX_n \leqslant A/c, c$ 充分大, 对一切 $n \in -N_0$, 有

$$\int_{X_n>c} X_{-k}\,\mathrm{d}P < \frac{\epsilon}{2} \longrightarrow \int_{X_n>c} X_n\,\mathrm{d}P < \epsilon,\ (n<-k)$$

以及

$$\int_{X_j>c} X_j\,\mathrm{d}P < \epsilon, j=0,1,\cdots,-k$$

于是当 $c$ 充分大时,

$$\sup\nolimits_n \int_{X_n>c} X_n\,\mathrm{d}P < \epsilon$$

□

**0.29系** 设 $\xi$ 可积, $\mathcal{G}_n\downarrow, \mathcal{G}_n\mathcal{F}$, 令 $\xi_n = E(\xi|\mathcal{G}_n)$, 则 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.},L^1} E(\xi|\cap\mathcal{G}_n)$.

最后研究下鞅的 Doob 分解定理, 它是连续时间 Doob-Meyer 分解定理的基础, 而后者是建立随机积分的基础.

称 $A=(A_t), t\in R_+$ 为 **增过程** 是指它的所有轨道为 $R_+$ 上非负有限值且右连续的增函数.

**0.30 定理** 设 $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 为下鞅，则存在唯一的适应增过程 $(A_n)_{n\geqslant 0}$，以及鞅 $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$，使得

$$\forall n, X_n = M_n + A_n \tag{0-28}$$

其中 $A_n$ 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测.

**证明** 令

$$A_0 = 0$$

$$A_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[E(X_j|\mathcal{F}_{j-1}) - X_{j-1}\right], n \geqslant 1$$

$$M_n = X_n - A_n, \quad n \geqslant 0 \tag{0-29}$$

则 $A = (A_n)$ 是一个零初值的非降序列，且 $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$，而 $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$ 是鞅. 我们称这种形式的分解式

$$X = M + A$$

为下鞅的 Doob 分解，容易证明这个分解在 a.s. 相等的意义下是唯一的. 事实上，如果还有 $X = M' + A'$，则

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n - M'_{n+1} + M'_n$$

两边取 $E(\cdot|\mathcal{F}_n)$，则得

$$A'_{n+1} - A'_n = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n = A_{n+1} - A_n$$

从而由 $A'_0 = A_0 = 0$，得到 $A'_n = A_n, M'_n = M_n, n \geqslant 0$. □

# 第一章　连续时间鞅

## §1.1　右连续上鞅与基本不等式

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间，$(\mathcal{F}_t)$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma$ 代数族，单调上升.

**1.1定义**　称 $(X_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 为上鞅 (鞅)，如果

(1)$\forall t\in R_+ E|X_t|<\infty$;

(2) $\forall t>s, E(X_t|\mathcal{F}_s)\leqslant X_s,(=X_s)$.

称 $(X_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 为右连续上鞅 (鞅)，如果它是上鞅 (鞅)，其轨道右连续，且 $\sigma$ 代数族右连续，即 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$, 这里 $\mathcal{F}_{t+}=\cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.

下面列出的基本不等式的证明都可从离散鞅论得到.

**1.2定理**

(1) 设 $(X_t)_{t\in R_+}$ 为上鞅，则对任意的 $r<s\in R_+,a,b\in R,\lambda>0$, 有

$$\lambda P\left(\sup_{t\in Q\cap[r,s]}X_t\geqslant\lambda\right)$$

$$\leqslant EX_r-\int_{(\sup_{t\in Q\cap[r,s]}X_t<\lambda)}X_s\mathrm{d}P \tag{1-1}$$

$$\lambda P\left(\inf_{t\in Q\cap[r,s]}X_t\leqslant-\lambda\right)$$

$$\leqslant\int_{(\inf_{t\in Q\cap[r,s]}X_t\leqslant-\lambda)}(-X_s)\,\mathrm{d}P\leqslant EX_s^- \tag{1-2}$$

$$\lambda P\left(\sup_{t\in Q\cap[r,s]}|X_t|\geqslant\lambda\right)\leqslant EX_r+2EX_s^- \tag{1-3}$$

(2) 设 $(X_t)_{t\in R_+}$ 为下鞅，则对任意的 $r<s\in R_+, a,b\in R$, $\lambda>0$, 有

$$\lambda P\left(\sup_{t\in Q\cap[r,s]} X_t \geqslant \lambda\right)$$

$$\leqslant \int_{(\sup_{t\in Q\cap[r,s]} X_t\leqslant\lambda)} (-X_s)\,\mathrm{d}P \leqslant EX_s^+ \qquad (1-1')$$

$$P\left(\inf_{t\in Q\cap[r,s]} X_t \leqslant -\lambda\right)$$

$$\leqslant -EX_r + \int_{(\inf_{t\in Q\cap[r,s]} X_t>-\lambda)} X_s \mathrm{d}P \qquad (1-2')$$

$$\lambda P\left(\sup_{t\in Q\cap[r,s]}|X_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant -EX_r + 2EX_s^+ \qquad (1-3')$$

(3) 在上鞅情形有

$$EU_a^b(X;Q\cap[r,s]) \leqslant \frac{1}{b-a}E(X_s-a)^- \qquad (1-4)$$

(4) 在下鞅情形有

$$EU_a^b(X;Q\cap[r,s]) \leqslant \frac{1}{b-a}E(X_s-a)^+ \qquad (1-4')$$

其中 $Q$ 表示 $R_+$ 中有理数全体. 如果 $(X_t)$ 的轨道 a.s. 右连续, 则上述不等式中的 $Q\cap[r,s]$ 均可换为 $[r,s]$.

**证明** 只证 (1–3) 式, (1–4) 式, 记 $Q\cap[r,s]=\{r_1,r_2,\cdots\}, U_n=\{r_1,\cdots,r_n\}$, 且假定它们已经从小到大排列. 由离散鞅的不等式,

$$\lambda P\left(\sup_{t\in U_n}|X_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant EX_{r_1} + 2EX_{r_n}^-$$
$$\leqslant EX_r + 2EX_s^-$$

令 $n\to\infty$, 则得 $(1-3)$ 式, 而由

$$EU_a^b(X;U_n) \leqslant \frac{1}{b-a}E(X_{r_n}-a)^- \leqslant \frac{1}{b-a}E(X_s-a)^-$$

由单调收敛定理得到 $(1-4)$ 式.

当轨道右连续时，则由显然的事实

$$\{\omega : \sup_{t\in Q\cap[r,s]} |X_t| \geqslant \lambda\} = \{\omega : \sup_{t\in[r,s]} |X_t| \geqslant \lambda\}$$

可知上述不等式中的 $Q\cap[r,s]$ 可改为 $[r,s]$. □

类似地可以证明：

**1.3 定理** 设 $(X_t,\mathcal{F}_t), t\in R_+$ 为鞅或非负下鞅，其几乎所有轨道右连续，令 $X^* = \sup_t X_t$, 则

$$P(X^* \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\sup_t E|X_t|^p, p\geqslant 1 \text{ (极大不等式)} \qquad (1-5)$$

$$\|X^*\|_p \leqslant q\sup_t \|X_t\|_p,\ p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \text{ (Doob 不等式)} \qquad (1-6)$$

从以上定理看出轨道右连续的重要性，现在讨论上鞅有右连续修正的条件. 下面称 $\sigma$ 代数族 $(\mathcal{F}_t)$ 满足 **通常条件** ，即假定它是 $\mathcal{F}$ 的单调上升子 $\sigma$ 代数族，右连续即 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$, 而且 $\mathcal{F}_0$, 从而一切的 $\mathcal{F}_t$ 均包含一切零概集.

**1.4 定理** 设 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件,则每个上鞅 $X=(X_t,\mathcal{F}_t), t\in R_+$ 都有右连续修正 $\Longleftrightarrow$ $m_t = EX_t$ 右连续.

这里，称过程 $(X_t),(Y_t), t\in R_+$ 互为 **修正** ，是指 $\forall t\in R_+, P(X_t\neq Y_t)=0$. 随机过程理论中也称它们 **随机等价** ，简称为等价. 但也许是这样的简称，常常造成误解. 似乎两个等价的过程是一样的，其实两个随机等价的过程只是它们的有限维分布相同. 两个过程等价与 $P(\forall t\in R_+, X_t\neq Y_t)=0$ 还相差很远. 在后者的情形我们称此两个过程 **无区别** ，这表明在去掉一个零测集后，两个过程的轨道完全一致.

定理的证明需要下面的三个引理.

**1.5引理** 设 $(X_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 为上鞅，则对几乎一切 $\omega$, 轨道具有如下的性质： $\forall t\in R_+,\lim_{s\in Q,s\downarrow t}X_s(\omega)$ 存在且有限，而对 $t\in R_+\backslash\{0\},\lim_{s\in Q,s\uparrow t}X_s(\omega)$ 存在且有限.

如果 $(X_t(\omega))$ 的轨道几乎右连续,则对 a.s.$\omega$ 及一切 $t\in R_+\backslash\{0\}$, $X_{t-}\triangleq\lim_{s\in R_+,s\uparrow t}X_s(\omega)$ 存在且有限.

**证明** 对 $t\in R_+,a<b$, 令

$$H_{t,a,b}=\{\omega:\sup_{s\in Q\cap[0,t]}|X_s(\omega)|=\infty\text{ 或 }U_a^b(X,Q\cap[0,t])=\infty\}$$

其中 $U_a^b(X,Q\cap[0,t])$ 表示 $\{X_s:s\in Q\cap[0,t]\}$ 上穿 $[a,b]$ 的次数，显然 $H_{t,a,b}\in\mathcal{F}_t$, 且由 $(1-4)$ 式,

$$E\,U_a^b(X,Q\cap[0,t])\leqslant\frac{1}{b-a}E\,(X_t-a)^-<\infty$$

从而 $P(H_{t,a,b})=0$. 记

$$H_t=\bigcup_{a<b,a,b\in Q}H_{t,a,b},\ H=\bigcup_{t\in R_+}H_t=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$$

则 $H_t\in\mathcal{F}_t,P(H_t)=0,P(H)=0$. 若 $\omega\notin H$, 则对一切 $t\in R_+$, $\lim_{s\in Q,s\downarrow t}X_s(\omega)$ 存在且有限， 而对 $t\in R_+\backslash\{0\},\lim_{s\in Q,s\uparrow t}X_s(\omega)$ 存在且有限.

如果 $(X_t(\omega))$ 的轨道几乎右连续，则对 a.s.$\omega$ 及一切 $t\in R_+\backslash\{0\},\lim_{s\in R_+,s\uparrow t}X_s(\omega)=\lim_{s\in Q,s\uparrow t}X_s(\omega)$ 存在且有限. □

**1.6引理** 设 $(X_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 为上鞅 (鞅)，则存在一个 $(\mathcal{F}_{t+})$ 适应的过程 $(\overline{X}_t)$ 满足

(1) $(\overline{X}_t)$ 为右连左极过程;

(2) $\forall t\in R_+$,

$$\overline{X}_t(\omega)=\lim_{s\in Q,s\downarrow t}X_s(\omega),\text{a.s.},\qquad(1-7)$$

$\forall t\in R_+\backslash\{0\}$,

$$\overline{X}_{t-}(\omega)=\lim_{s\in Q,s\uparrow t}X_s(\omega)\qquad(1-8)$$

(3) $\forall t\in R_+$, 有

$$X_t\geqslant E(\overline{X}_t|\mathcal{F}_t)\text{ a.s..(相应地，}=E(\overline{X}_t|\mathcal{F}_t))$$

(4) $(\overline{X}_t,\mathcal{F}_{t+})$ 为上鞅.

**证明** 对一切 $t\in R_+$, 令 $H_{t+}=\cap_{s>t}H_s$, 则 $H_{t+}\in\mathcal{F}_{t+}$. 如果 $\omega\notin H_{t+}$, 则必存在 $t_1>t$, 使得 $\omega\notin H_{t_1}$, 于是

$$\sup_{s\in Q\cap[0,t_1]}|X_s(\omega)|<\infty,$$

且

$$U_a^b(X,Q\cap[0,t_1])<\infty.$$

于是极限 $\lim_{s\in Q,s\downarrow t}X_t(\omega)$ 存在且有限，令

$$\overline{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim_{s\in Q,s\downarrow t}X_s(\omega), & \omega\notin H_{t+}\\ 0, & \omega\in H_{t+}\end{cases}\qquad(1-9)$$

则 $\overline{X}_t\in\mathcal{F}_{t+}$. 注意到 $H=\cup H_t=\cup H_n,P(H)=0$. 而当 $\omega\notin H$ 时，(1 - 7) 式成立. 往证 $\overline{X}_t$ 右连续:

(1) $\forall t\in R_+$, 如 $\omega\in H_{t+}$, 则 $\overline{X}_t(\omega)=0$, 且对一切 $s>t,\omega\in H_{s+},\overline{X}_s(\omega)=0$. 可见 $\overline{X}_t(\omega)$ 在 $H_{t+}$ 上恒为 0.

(2) 如 $\omega \notin H_{t+}$, 必存在 $r_0 > t$, 使对一切 $r_0 \geqslant r > t, \omega \notin H_{r+}\,(r \leqslant r_0)$, 由 $\overline{X}_t$ 的定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < r - t$ 使得, 当 $s \in Q, t < s < t + \delta$ 时有 $|\overline{X}_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant \epsilon$. 于是当 $t < r < t + \delta$ 时,

$$|\overline{X}_t(\omega) - \overline{X}_r(\omega)| = \lim_{s \in Q, s \downarrow r} |\overline{X}_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant \epsilon$$

这表明 $(\overline{X}_t)$ 在 $H_{t+}^c$ 上右连续. 联合 (1) 便知 $\overline{X}_t$ 右连续, 下面的 (4) 证明了 $(\overline{X}_t)$ 为上鞅, 而由引理 1.5, $\lim_{s \in Q, \uparrow t} X_s(\omega)$ 存在且有限, 这表明 $(\overline{X}_t)$ 为右连左极过程. 类似可证 $(1-8)$ 式, 于是 (1), (2) 得证.

(3) 往证 $X_t \geqslant E(\overline{X}_t | \mathcal{F}_t)$. 设 $r_n \in Q, r_n \downarrow t, \forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$\int_A X_t \,\mathrm{d}P \geqslant \int_A E(X_{r_n} | \mathcal{F}_t) \,\mathrm{d}P = \int_A X_{r_n} \,\mathrm{d}P$$

由引理 0.28, $(X_{r_n})$ 一致可积, 从而由 $X_{r_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \overline{X}_t(\omega)$ 以及 $L^1$ 收敛原理,

$$\lim_{n \to \infty} \int_A X_{r_n} \,\mathrm{d}P = \int_A X_t \,\mathrm{d}P$$

于是可得 $X_t \geqslant E(\overline{X}_t | \mathcal{F}_t)$.

(4) 往证 $(\overline{X}_t, \mathcal{F}_{t+})$ 为上鞅. 对 $t > s$, 存在 $s_n \downarrow s, s_n < t, t_n \downarrow t$, 对 $\forall A \in \mathcal{F}_{s+}$, 则 $A \in \mathcal{F}_{s_n}$, 于是

$$\int_A X_{t_n} \,\mathrm{d}P \leqslant \int_A X_{s_n} \,\mathrm{d}P$$

利用 $(X_{s_n}), (X_{t_n})$ 的一致可积性, 则得

$$\int_A \overline{X}_t \,\mathrm{d}P \leqslant \int_A \overline{X}_s \,\mathrm{d}P$$

□

**1.7 推论** 设 $(X_t,\mathcal{F}_t)$ 为上鞅 (鞅)， a.s. 右连续，则存在与它无区别的右连左极上鞅 (鞅)$(\overline{X}_t,\mathcal{F}_{t+})$.

**证明** 令 $\overline{X}_t$ 为引理 1.6 所定义的过程，则由 $(X_t)$a.s. 右连续，故 $\overline{X}_t=X_t,\forall t\in Q$ a.s.. 两者的轨道右连续，因此两者无区别. □

在 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ 的条件下，对于几乎轨道右连续的上鞅或鞅，在无区别的意义下，均假定它是右连左极的上鞅或鞅. 问题是上鞅或鞅的轨道不一定几乎右连续，在许多情形只需考虑它的右连续修正. 定理 1.4 给出了右连续修正的充分性条件.

**定理 1.4 的证明** 由引理 1.6 的 (3),(4) 以及 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件，我们有 $\forall t\in R_+,X_t\geqslant\overline{X}_t$,a.s.. 因此 $X_t=\overline{X}_t$,a.s. $\Longleftrightarrow$ $EX_t=E\overline{X}_t$. 而对 $t_n\in Q,t_n\downarrow t$, 由 $(X_{t_n})$ 的一致可积性，有 $E\overline{X}_t=\lim\limits_{n\to\infty}EX_{t_n}$. 所以 $X_t=\overline{X}_t\iff EX_t=\lim\limits_{n\to\infty}EX_{t_n}$. 注意到 $EX_t$ 是 $t$ 的单调非增函数，故 $X_t=\overline{X}_t$a.s. $\Longleftrightarrow$ $EX_t$ 右连续. □

**注意！** 对于鞅， $EX_t$ 为常数，因此只要 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，一切 $(\mathcal{F}_t)$ 鞅总有右连左极的修正.

## §1.2 鞅收敛与 Doob 停止定理

鞅是上鞅也是下鞅，所以关于上鞅、下鞅的定理也适合鞅，而且如 $X$ 为上鞅，则 $-X$ 为下鞅，因此只需给出关于上鞅或鞅的定理. 在明确的情形，我们简写上 (下) 鞅 $(X_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 为上 (下) 鞅 $(X_t)$. 与离散情形相似，我们称 $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ 为停时，如果 $\forall t\in R_+,\{\omega:\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$. 称

$$\mathcal{F}_\tau=\{A\in\mathcal{F}_\infty:A\cap(\tau\leqslant t)\in\mathcal{F}_t\}$$

为 **停时 $\tau$ 前事件的 $\sigma$ 代数**，其中 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

今后我们记 $\mathcal{J}$ 为所论的全体停时.

对于停时 $\tau$, 如果 $F \in \mathcal{F}_\tau$, 则容易证明停时在 $F$ 上的限制

$$\tau_F = \tau I_F + (+\infty) I_{F^c}$$

也是停时.

**1.8定理** 设 $(X_t)$ 为右连续下鞅，满足

$$\sup_t EX_t^+ < \infty \text{ (等价地, } \sup_t E|X_t| < \infty) \tag{1-10}$$

则 a.s. 存在极限 $X_\infty \triangleq \lim_{t\to\infty} X_t$, 且 $EX_\infty < \infty$.

**证明** 由 (1-4) 式得到

$$EU_a^b(X;[0,\infty)) \leqslant \frac{1}{b-a} \sup_t (E(X_t^+) + |a|) < \infty \tag{1-11}$$

而极限 $\lim\limits_{t\to\infty} X_t$ 不存在意味着必有 $a < b$, 使得

$$P\left(\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t < a < b < \overline{\lim}_{t\to\infty} X_t\right) > 0,$$

从而 $P\left(U_a^b(X;[0,\infty))\right) = \infty > 0$, 与 (1-11) 式矛盾. 因此极限 $X_\infty \triangleq \lim_{t\to\infty} X_t$ 存在，而由 Fatou 引理，则得 $E|X_\infty| < \infty$. □

下面的定理包含了 **Doob停止定理**.

**1.9定理** 对于右连续鞅 $X = (X_t)$ 下面事实等价：

(1) $X$ 为 Doob 鞅, 即存在可积的随机变量 $\xi$, 使 $X_t = E(\xi|\mathcal{F}_t)$;

(2) $(X_t)$ 一致可积;

(3) $(X_t)$ 是 $L^1$ 收敛鞅，即 $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty$;

(4) $(X_t)$ 是右闭鞅；即 $\forall t, X_t = E(X_\infty|\mathcal{F}_t)$;

(5) $(X_t)$ 是 Doob 停止鞅, 即 Doob 停止定理对一切停时成立.

**证明** (1)→(2): 显然 $\sup_t E|X_t| \leqslant E|\xi| < \infty$, 其次对任意的 $b, c > 0$, 由

$$\begin{aligned}\int_{(|X_t|>c)} |X_t|\,\mathrm{d}P &\leqslant \int_{(|X_t|>c)} |\xi|\,\mathrm{d}P \\ &= \int_{(|X_t|>c, |\xi|\leqslant b)} |\xi|\,\mathrm{d}P + \int_{(|X_t|>c, |\xi|>b)} |\xi|\,\mathrm{d}P \\ &= \frac{b}{c} E|X_t| + \int_{(|\xi|>b)} |\xi|\,\mathrm{d}P\end{aligned}$$

于是

$$\sup_t \int_{|X_t|>c} |X_t|\,\mathrm{d}P \leqslant \frac{b}{c} E|\xi| + \int_{|\xi|>b} |\xi|\,\mathrm{d}P$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 取 $b$ 充分大, 再取 $c$ 充分大, 可使上式小于 $\epsilon$.

(2)→(3): 由鞅收敛定理及一致可积性可得.

(3)→(4): 对于任意的 $s > t, A \in \mathcal{F}_t$, 由 $E(X_s|\mathcal{F}_t) = X_t$, 并令 $s \to \infty$, 则

$$\int_A X_t\,\mathrm{d}P = \int_A X_s\,\mathrm{d}P \to \int_A X_\infty\,\mathrm{d}P$$

所以 $X_t = E(X_\infty|\mathcal{F}_t)$.

(4)→(5): 设 $\tau \geqslant \sigma$ a.s., 为两个停时, 记 $D_n = \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, +\infty\right\}, \forall n$, 令

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{\left(\frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau < \frac{k}{2^n}\right)} + (+\infty) I_{\tau=\infty}$$

类似地定义 $\sigma_n$, 则 $\tau_n, \sigma_n$ 均是 $D_n$ 值的停时, 且 $\tau_n \downarrow \tau, \sigma_n \downarrow \sigma$, $\tau_n \geqslant \sigma_n$. 因 $(X_t)_{t\in D_n}$ 是离散时间鞅, 由 Doob 停止定理,

$E(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$. 于是 $\forall A \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_n}$, 有

$$\int_A X_{\tau_n}\,\mathrm{d}P = \int_A X_{\sigma_n}\,\mathrm{d}P \tag{1-12}$$

可见 $(X_{\tau_n}, \mathcal{F}_{\tau_n}), (X_{\sigma_n}, \mathcal{F}_{\sigma_n})$ 构成反向鞅, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} E X_{\tau_n} \leqslant E X_0 < \infty$, 同理 $\lim\limits_{n\to\infty} E X_{\sigma_n} < \infty$, 于是 $(X_{\tau_n}), (X_{\sigma_n})$ 均一致可积. 在 (1 − 12) 式两端令 $n \to \infty$, 则得

$$\int_A X_\tau\,\mathrm{d}P = \int_A X_\sigma\,\mathrm{d}P$$

再由下面的引理 1.13, $X_\sigma \in \mathcal{F}_\sigma$, 所以

$$E\left(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\right) = X_\sigma \text{a.s.}. \tag{1-13}$$

得证.

(5)→ (1). 显然. □

**1.10系** 设 $\xi$ 为可积随机变量, 令 $\xi_t = E(\xi|\mathcal{F}_t), \eta = E(\xi|\mathcal{F}_\infty)$, 则 $\xi_t \xrightarrow{\text{a.s.}, L^1} \eta$.

证明留给读者.

**1.11定理** 设 $(X_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为右连续上鞅, 则下列事实等价:

(1) $X$ 是控制某 Doob 鞅的上鞅, 即存在 $\xi$, $E|\xi| < \infty$, 使得 $X_t \geqslant E(\xi|\mathcal{F}_t)$;

(2) $(X_t^-)$ 一致可积;

(3) $(X_t)$ 为右闭上鞅;

(4) $(X_t)$ 是 Doob 停止上鞅, 即对它, Doob 停止定理成立.

**证明** (1) → (2), 显然.

(2)→(3), 由 $(X_t^-)$u.i., 可见存在 $X_\infty$, 使得 $X_t \xrightarrow{\text{a.s}} X_\infty$. 往证 $\forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$\int_A X_\infty \,\mathrm{d}P \leqslant \int_A X_t \,\mathrm{d}P \tag{1-14}$$

考虑 $s_n > t, s_n \to \infty$, 则

$$\int_A X_t \,\mathrm{d}P \geqslant \int_A X_{s_n} \,\mathrm{d}P = \int_A X_{s_n}^+ \,\mathrm{d}P - \int_A X_{s_n}^- \,\mathrm{d}P \tag{1-15}$$

由 $(X_{s_n})$u.i., 可见 $\int_A X_{s_n}^- \,\mathrm{d}P \to \int_A X_\infty^- \,\mathrm{d}P$, 而由 Fatou 引理

$$\int_A X_\infty^+ \,\mathrm{d}P = \int_A \varliminf_{n\to\infty} X_{s_n}^+ \,\mathrm{d}P \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A X_{s_n}^+ \,\mathrm{d}P$$

这样, 由 (1 − 15) 式便得 (1 − 14) 式. 其余的证明留给读者. □

设 $X = (X_t), t \in R_+$ 为一随机过程, 亦即 $\forall t, X_t$ 是随机变量. 作为 $(t,\omega)$ 的二元函数, 如果 $\forall B \in \mathcal{B}(R), \{(t,\omega) : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$, 则称它为 **可测过程**. 如果 $\forall t, X$ 限于 $[0,t] \times \Omega$ 为 $\mathcal{B}([0,t] \times \mathcal{F}_t)$ 可测, 亦即 $\forall B \in \mathcal{B}(R)$,

$$\{(s,\omega) : X_s(\omega) \in B\} \cap [0,t] \times \Omega \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$$

则称 $X$ 为 **循序 (可测) 过程**, 显然循序过程为适应过程. 如果 $A \subseteq R_+ \times \Omega, I_A$ 为循序过程, 则称 $A$ 为 **循序集** , 全体循序集构成一个 $\sigma$ 代数, 称为 **循序 $\sigma$ 代数** , 记为 $\mathfrak{D}$.

**1.12引理** 右连续 (左连续) 的适应过程为循序可测过程.

**证明** 设 $X$ 为右连续适应过程, $\forall t \in R_+$, 令

$$X_s^n = X_0(\omega) I_{[s=0]} + \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{kt}{2^n}} I_{\left(\frac{(k-1)t}{2^n} < s \leqslant \frac{kt}{2^n}\right)}, s \in [0,t]$$

则 $X^n$ 为 $\mathcal{B}([0,t]\times\mathcal{F}_t)$ 可测过程, 且在 $[0,t]\times\Omega$ 上, $\lim\limits_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$a.s.. 因此限于 $[0,t]\times\Omega, X$ 为 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t$ 可测, 所以 $X$ 为循序过程. □

**1.13引理** 设 $(X_t)$ 为循序过程, 则 $\forall T\in\mathcal{J}, X_T I_{T<\infty}\in\mathcal{F}_T$, 如还有 $X_\infty\in\mathcal{F}_\infty$, 则 $X_T\in\mathcal{F}_T$.

**证明** $\forall t, T\wedge t\in\mathcal{F}_t$, 而 $X_{T\wedge t}$ 作为 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 到 $(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t]))$ 的可测映射 $\omega\mapsto(\omega,T\wedge t)$ 与 $(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t]))$ 到 $(R,\mathcal{B}(R))$ 的可测映射 $(\omega,s)\mapsto X_s(\omega)$ 的复合. 因此 $X_{T\wedge t}\in\mathcal{F}_t$, 于是 $\forall B\in\mathcal{B}(R)$,

$$
\begin{aligned}
&\{X_T I_{T<\infty}\in B\}\cap(T\leqslant t)\\
&=\{X_{T\wedge t}(\omega)\in B\}\cap(T\leqslant t)\in\mathcal{F}_t
\end{aligned}
$$

又

$$X_T I_{T<\infty}=\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} I_{(T\leqslant n)}\in\mathcal{F}_\infty$$

所以由 $\mathcal{F}_T$ 的定义, $X_T I_{T<\infty}\in\mathcal{F}_T$. 如果还有 $X_\infty\in\mathcal{F}_\infty$, 则 $X_T=X_T I_{T<\infty}+X_\infty I_{T=\infty}\in\mathcal{F}_T$, 引理得证. □

至此, 定理 1.9, 1.11 证毕.

**1.14推论** 设 $(X_t), t\in\overline{R}_+$ 为右连续鞅 (或上鞅), $\tau,\sigma$ 为停时, 我们有

$$E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)=X_{\tau\wedge\sigma}, (\leqslant X_{\tau\wedge\sigma}) \qquad (1-16)$$

**证明** 设 $A=(\tau\geqslant\sigma)$, 令 $T=\tau I_A+\sigma I_{A^c}$, 则 $T$ 仍为停时, 且 $T\geqslant\sigma$. 于是由右闭鞅或上鞅的 Doob 停止定理有 $E(X_T|\mathcal{F}_\sigma)=(\leqslant)X_\sigma$, 而 $E(X_T|\mathcal{F}_\sigma)=I_A E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)+I_{A^c}X_\sigma$, 所以得到

$$E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)=(\leqslant)X_\sigma,\ \text{在}(\tau\geqslant\sigma)\text{上 a.s..}$$

这也可写为

$$E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = (\leqslant) X_{\tau\wedge\sigma}, \text{ a.s..}$$

□

**1.15推论** 设 $(X_t)$ 为鞅或上鞅，轨道右连续，则对任何的停时 $T$, 所谓的 **停止过程** $X^T = (X_{T\wedge t}, \mathcal{F}_t)$ 也是鞅或上鞅，轨道右连续.

**证明** 我们只要证明 $\forall a \geqslant s$, 有 $E(X_{T\wedge a}|\mathcal{F}_s) = (\leqslant) X_{T\wedge s}$. 考虑右闭的鞅或上鞅 $(X_t, t \leqslant a)$, 则可应用 Doob 停止定理，对任何的停时 $T$, 有

$$E(X_{T\wedge a}|\mathcal{F}_s) = (\leqslant) X_{T\wedge s}.$$

□

## §1.3 上鞅的 Doob-Meyer 分解

本节主要介绍上鞅的 Doob-Meyer 分解定理，而把 Riesz 分解作为过渡.

**1.16定义** 设 $\pi = (\pi_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为右连续非负上鞅，如果 $\lim\limits_{t\to\infty} E\pi_t = 0$, 则称 $\pi$ 为 **位势**. 如对右连续上鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$, 存在一个右连续鞅 $M = (M_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$, 以及位势 $\pi$, 使得

$$X_t = M_t + \pi_t$$

则称它为 $X$ 的 Riesz 分解.

显然 Riesz 分解若存在必唯一. 事实上，由

$$X_{t+s} = M_{t+s} + \pi_{t+s} = M'_{t+s} + \pi'_{t+s}$$

而

$$E(X_{t+s}|\mathcal{F}_s) = M_s + E(\pi_{t+s}|\mathcal{F}_s) = M'_s + E(\pi'_{t+s}|\mathcal{F}_s)$$

由 $E\pi_{t+s}\to 0, E\pi'_{t+s}\to 0, (t\to\infty)$, 故存在子列 $t_k\to\infty$, 使得 $E(\pi_{t_k+s}|\mathcal{F}_s)\to 0, E(\pi'_{t_k+s}|\mathcal{F}_s)\to 0$. 从而 $M_s=M'_s, \pi_s=\pi'_s$.

**1.17定理** 设上鞅 $X$ 的轨道右连续,

(1) 为要 $X$ 有 Riesz 分解必须且仅只须 $\lim\limits_{t\to\infty} EX_t>-\infty$;

(2) 若 $X$ 为非负上鞅, 则其 Riesz 分解中的 $(M_t)$ 非负;

(3) 设 $(X_t), t\in R_+$ 一致可积, 则 $X_t\xrightarrow{\text{a.s.},L^1}X_\infty$, 令 $M_t$ 为鞅 $E(X_\infty|\mathcal{F}_t)$ 的右连续修正, 则 $X_t=M_t+\pi_t$ 为其 Riesz 分解;

(4) 设 $(X_t)$ 控制一个下鞅 $(Y_t,\mathcal{F}_t)$, 则它有 Riesz 分解.

**证明** (1) 必要性显然, 往证充分性: 令 $Z_{t,s}=E(X_{t+s}|\mathcal{F}_t)$, 则对 $s>r$, 有

$$Z_{t,s}=E(E(X_{t+s}|\mathcal{F}_{t+r})|\mathcal{F}_t)\leqslant E(X_{t+r}|\mathcal{F}_t)=Z_{t,r}$$

可见 $Z_t=\lim\limits_{n\to\infty} Z_{t,n}$ 存在, 而且由单调收敛定理知, $Z_{t,n}\xrightarrow{L^1}Z_t$. 对 $t>s$, 我们有

$$\begin{aligned}E(Z_t|\mathcal{F}_s)&=\lim_{n\to\infty}E(Z_{t,n}|\mathcal{F}_s)\\&=\lim_{n\to\infty}E(X_{t+n}|\mathcal{F}_s)\\&=\lim_{n\to\infty}Z_{s,n+(t-s)}=Z_s\end{aligned}$$

而且 $Z_t\in\mathcal{F}_t$, 故 $(Z_t,\mathcal{F}_t), t\in R_+$ 为鞅, 且轨道右连续. 令 $\pi_t=X_t-Z_t$, 则由 $Z_{t,n}=E(X_{t+n}|\mathcal{F}_t)\leqslant X_t$, 故 $X_t\geqslant Z_t$, 于是 $\pi_t\geqslant 0$, 且为上鞅. 而

$$\begin{aligned}E\pi_t&=EX_t-EZ_t=\lim_{n\to\infty}E(X_t-Z_{t,n})\\&=E(X_t-X_{t+n})\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty} EX_t > -\infty$, 所以 $\lim\limits_{t\to\infty} E\pi_t = 0$, 即 $\pi$ 是位势.

(2) $M_t = Z_t = \lim\limits_{n\to\infty} Z_{t,n} = \lim\limits_{n\to\infty} E(X_{t+n}|\mathcal{F}_t) \geqslant 0$.

(3) 显然.

(4) 由 $EX_t \geqslant EY_t \geqslant EY_0$, 故 $\lim\limits_{t\to\infty} EX_t > -\infty$. □

**1.18定义** 称随机过程 $X$类 D, 如果 $\{X_T I_{T<\infty} : T \in \mathcal{J}\}$ 为一致可积族, 记 $\mathcal{J}_a = \{\tau \in \mathcal{J}, \tau \leqslant a\}$ 如果 $\forall 0 \leqslant a < \infty, \{X_T : T \in \mathcal{J}_a\}$ 为一致可积族, 则称 $X$类 DL 或局部类 D. 显然类 D 必类 DL.

**1.19定理**

(1) 任何右连续鞅类 DL;

(2) 任何右连续一致可积鞅类 D;

(3) 任何右连续非负下鞅类 DL.

**证明** 证明都是简单的.

(1) 对 $\tau \in \mathcal{J}_a$, $X_\tau = E(X_a|\mathcal{F}_\tau)$, 因而 $\{X_\tau : \tau \in \mathcal{J}_a\}$u.i.;

(2) 由右闭性, $\forall \tau \in \mathcal{J}, X_\tau = E(X_\infty|\mathcal{F}_\tau)$, 故 $\{X_\tau : \tau \in \mathcal{J}\}$u.i.;

(3) $\forall \tau \in \mathcal{J}_a$, 由

$$0 \leqslant X_\tau \leqslant E(X_a|\mathcal{F}_\tau)$$

得证. □

**1.20定义** 一过程称为是 **增过程** 是指它的几乎所有轨道为 $R_+$ 上非负有限值的右连续增函数, 两个增过程之差称为 **有限变差过程**. 称增过程 $A = (A_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 为 **自然增过程** 是指对任意的非负有界右连左极鞅 $M = (M_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 有

$$E\int_0^\infty M_{s-}\,\mathrm{d}A_s = EM_\infty A_\infty \tag{1-17}$$

当 $EA_\infty < \infty$ 时, 则称 $A$ 为 **可积的自然增过程**.

$(1-17)$ 式的左边是关于增过程的 Lebesgue-Stieltjes 积分，下面引入的时变将把 Stieltjes 积分转化为 Lebesgue 积分.

**1.21定义** 设 $A=(A_t,\mathcal{F}_t), t\in R_+$ 为 $\overline{R}_+$ 值的适应增过程，称

$$C_t(\omega)=\inf\{s:A_s(\omega)>t\} \tag{1-18}$$

为与增过程 $A$ 相联系的 **时变**.

设 $\mathcal{F}_t$ 右连续，则时变 $C_t(\omega)$ 是停时. 事实上，设 $s>0, C_t(\omega)<s$，则 $A_s>t$，于是 $s\geqslant C_t(\omega)$. 故 $(C_t<s)\subseteq(A_s>t)\subseteq(C_t\leqslant s)$. 而 $(C_t<s)=\cup_n(A_{s-n^{-1}}>t)\subseteq(C_t\leqslant s-n^{-1})\subseteq(C_t<s)$. 这样， $(C_t<s)=\cup_n(A_{s-n^{-1}}>t)\in\mathcal{F}_s$，于是 $(C_t\leqslant s)\in\mathcal{F}_{s+}=\mathcal{F}_s$. 因此 $C_t$ 为停时.

容易看出， $C_t$ 也是右连续增过程，而且

$$\sup\{t:C_t\leqslant s\}=\inf\{t:C_t>s\}$$

我们有

$$A_s=\sup\{t:C_t\leqslant s\}=\inf\{t:C_t>s\} \tag{1-19}$$

事实上，若 $C_t>s$，则 $A_s\leqslant t$，故 $A_s\leqslant\inf\{t:C_t>s\}$. 而当 $C_t\leqslant s$，则 $A_s\geqslant t$，故 $A_s\geqslant\sup\{t:C_t\leqslant s\}$，两者联合， $(1-19)$ 式得证.

利用 $(1-19)$ 式以及通常对由示性函数到可测函数的证明方法，对 Borel 可测函数 $f$，我们有

$$\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}A_s=\int_0^\infty f(C_s)I_{(C_s<\infty)}\mathrm{d}s \tag{1-20}$$

下面的定理 1.23 是自然增过程的特征. 我们先有

**1.22引理** 设 $A$ 为适应增过程, $M=(M_t,\mathcal{F}_t), t\geqslant 0$ 为右连续鞅, 则对任意的 $T\geqslant 0$,

$$E\int_0^T M_s\,\mathrm{d}A_s = E\,M_T A_T \tag{1-21}$$

**证明** 利用 (1 − 22) 式

$$\int_0^T M_s\mathrm{d}A_s = \int_0^\infty M_{C_t(\omega)} I_{(t:C_t(\omega)<T)}\,\mathrm{d}t$$

由 Fubini 定理

$$\begin{aligned} E\int_0^T M_s\,\mathrm{d}A_s &= \int_0^\infty E\,M_{C_t(\omega)} I_{(t:C_t(\omega)<T)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty E\left(E\,(M_T|\mathcal{F}_{C_t}) I_{(t:C_t(\omega)<T)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty E\,M_T I_{(t:C_t(\omega)<T)}\,\mathrm{d}t \\ &= EM_T\int_0^\infty I_{(t<A_T(\omega))}\,\mathrm{d}t = EM_T A_T \end{aligned}$$

□

**1.23定理** 1) 一个适应增过程 $A=(A_t,\mathcal{F}_t), t\geqslant 0$ 为自然增过程的充分条件是: 对任意的非负有界右连左极鞅 $M=(M_t,\mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, 有

$$E\int_0^T M_s\,\mathrm{d}A_s = E\int_0^T M_{s-}\,\mathrm{d}A_s \tag{1-22}$$

2) 一个可积的适应增过程 $A=(A_t,\mathcal{F}_t), t\geqslant 0$ 为可积的自然增过程的充要条件是 (1 − 22) 式成立.

**证明** 1) 由 (1 − 22) 式及 (1 − 21) 式,

$$E\int_0^T M_{s-}\mathrm{d}A_s = EM_TA_T$$

于是

$$\begin{aligned} E\int_0^\infty M_{s-}\,\mathrm{d}A_s &= \lim_{T\to\infty} E\int_0^T M_{s-}\,\mathrm{d}A_s \\ &= \lim_{T\to\infty} E\,M_TA_T \\ &= \lim_{T\to\infty} E\,M_\infty A_T = E\,M_\infty A_\infty \end{aligned}$$

可见 $A$ 为自然增过程.

2) 设 $A$ 为可积适应增过程, 充分性由 1) 可知, 只需证明必要性: 令 $M_s^T = M_sI_{(s<T)} + M_TI_{(s\geqslant T)}$, 则 $(M_s^T)$ 仍是有界右连左极鞅, 由假设 $E\int_0^\infty M_{s-}^T\,\mathrm{d}A_s = E\,M_\infty^T A_\infty$, 我们有

$$\begin{aligned} E\int_0^\infty M_{s-}^T\,\mathrm{d}A_s &= \lim_{T\to\infty} E\,M_T^TA_T \\ &= \lim_{T\to\infty} E\int_0^T M_s^T\,\mathrm{d}A_s \\ &= E\int_0^\infty M_s^T\,\mathrm{d}A_s \end{aligned}$$

注意到 $M_{s-}^T = M_{s-}I_{(s<T)} + M_TI_{(s\geqslant T)}$, 而 $E\,M_T(A_\infty - A_T) < \infty$. 因为

$$E\int_0^\infty M_{s-}^T\,\mathrm{d}A_s = E\int_0^T M_{s-}^T\,\mathrm{d}A_s + E\,M_T(A_\infty - A_T) < \infty$$

$$E\int_0^\infty M_s^T \mathrm{d}A_s = E\int_0^T M_s^T \mathrm{d}A_s + E\,M_T(A_\infty - A_T) < \infty$$

从而

$$E\int_0^T M_s \mathrm{d}A_s = E\int_0^T M_{s-} \mathrm{d}A_s \qquad \square$$

本节主要定理是 Doob-Meyer 分解定理，先讨论位势的 Doob-Meyer 分解定理.

**1.24定理** 设有连续位势 $\pi = \{(\pi_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0\}$ 类 D, 则存在可积的自然增过程 $A = (A_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$, 使得

$$\pi_t = E(A_\infty | \mathcal{F}_t) - A_t \qquad (1-23)$$

且上述分解还是唯一的.

**证明** 证明分几步. 1) 首先证明关于离散时间位势分解的结果. 设 $\pi = (\pi_n, \mathcal{F}_n), n \in N_0$ 为位势, 则由 Doob 分解, $\pi_n = m_n - A_n, A_n \uparrow A_\infty$. 因为 $E A_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} E A_n = \lim\limits_{n\to\infty} E(m_n - \pi_n) = E m_0 < \infty$, 可见 $(A_n)$u.i.. $(\pi_n)$ 是非负上鞅. $\pi_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ 存在, 且 $0 \leqslant E\pi_\infty \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} E\pi_n = 0$, 故 $\pi_\infty = 0$, 而 $\pi_n \xrightarrow{L^1} 0$, 于是 $(\pi_n)$u.i., 从而 $(m_n)$u.i.. 由 Doob 停止定理, $m_n = E(m_\infty|\mathcal{F}_n)$. 这样, $\pi_\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(m_n - A_n) = m_\infty - A_\infty, \pi_\infty = 0$, 故 $A_\infty = m_\infty$. 所以, $\pi_n = m_n - A_n = E(m_\infty|\mathcal{F}_n) - A_n = E(A_\infty|\mathcal{F}_n) - A_n$, 记 $D_n = \left\{\dfrac{i}{2^n} : i = 0, 1, 2, \cdots\right\}$, 把上述结果应用到 $(\pi_{i2^{-n}}, \mathcal{F}_{i2^{-n}})$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, 上, 得到一个增序列 $A_{i2^{-n}}(n), i \geqslant 1$, 而且 $A_{i2^{-n}}(n) \in \mathcal{F}_{i2^{-n}}$, 使得

$$\pi_{i2^{-n}} = E(A_\infty(n)|\mathcal{F}_{i2^{-n}}) - A_{i2^{-n}}(n) \qquad (1-24)$$

2) 先假设 $A_\infty(n) \triangleq \lim_{i\to\infty} A_{i2^{-n}}(n)$ 为一致可积 (下面将证明它与 $(\pi_t)$ 类 D 等价). 于是随机变量族 $(A_\infty(n))$弱列紧 ([3]th.5.9p192), 也即存在子列 $(n_j)$ 以及可积的随机变量 $A_\infty$, 使得对任何有界的随机变量 $\xi$ 有

$$\lim_{j\to\infty} E\,A_\infty(n_j)\xi = E\,A_\infty\xi \qquad (1-25)$$

可以证明 $E\,(A_\infty(n)|\mathcal{F}_r) \xrightarrow{w} E\,(A_\infty|\mathcal{F}_r)$. 事实上, $\forall\eta$(有界随机变量), $\xi = E\,(\eta|\mathcal{F}_r)$, 我们有

$$\begin{aligned} E\,(E(A_\infty(n_j)|\mathcal{F}_r)\xi) &= E\,A_\infty(n_j)\xi \\ &\to EA_\infty\xi = E\,[E(A_\infty|\mathcal{F}_r)\xi] \qquad (1-26) \end{aligned}$$

$(1-26)$式左边 $= E\,(E\,(A_\infty(n_j)|\mathcal{F}_r)\eta)$,

$(1-26)$式右边 $= E\,(E\,(A_\infty|\mathcal{F}_r)\eta)$. 这表明

$$E(A_\infty(n_j)|\mathcal{F}_r) \xrightarrow{w} E(A_\infty|\mathcal{F}_r) \qquad (1-27)$$

记 $m_t$ 为鞅 $E(A_\infty|\mathcal{F}_t)$ 的右连续修正, 令

$$\widetilde{A}_t = m_t - \pi_t \qquad (1-28)$$

由 $(1-24)$ 式及 $(1-27)$ 式容易证明, $\forall r \in D_n, \widetilde{A}_r = A_r$. 所以, 我们改记 $\widetilde{A}$ 为 $A$. 由于 $A_t$ 在 $D_n$ 上是增加的. 于是由 $A_t$ 的右连续性, 可知 $A_t$ 为增过程. 往证 $A_t$ 为自然增过程, 为此验证 $(1-17)$ 式. 设 $Y = (y_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 为非负有界右连左极鞅, 我们有 .

$$
\begin{aligned}
E\int_0^\infty y_{s-}\mathrm{d}A_s &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}E\left(y_{i2^{-n}}(A_{(i+1)2^{-n}}-A_{i2^{-n}})\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}E\left(y_{i2^{-n}}E\left(A_{(i+1)2^{-n}}-A_{i2^{-n}}|\mathcal{F}_{i2^{-n}}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}E\Big[y_{i2^{-n}}E\left((m_{(i+1)2^{-n}}-\pi_{(i+1)2^{-n}})\right.\\
&\quad \left.-(m_{i2^{-n}}-\pi_{i2^{-n}})|\mathcal{F}_{i2^{-n}}\right)\Big]\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}E\left(y_{i2^{-n}}E\left(\pi_{i2^{-n}}-\pi_{(i+1)2^{-n}}|\mathcal{F}_{i2^{-n}}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}E\left(y_{i2^{-n}}(A_{(i+1)2^{-n}}(n)-A_{i2^{-n}}(n))\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}E\left(y_{(i+1)2^{-n}}A_{(i+1)2^{-n}}(n)-y_{i2^{-n}}A_{i2^{-n}}(n)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}EA_\infty(n)y_\infty\\
&= EA_\infty y_\infty
\end{aligned}
$$

其中最后一个等号是由于 (1 − 23) 式，只要考虑子列 $(n_j)$. 所以 $A$ 是自然增过程.

3) 往证分解的唯一性: 设 $\pi_t = m_t - A_t = m'_t - A'_t$, 则 $A_t - A'_t = m'_t - m_t$ 为鞅. 考虑任意的右连左极鞅 $Y = (y_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$, 以及 $[0,t]$ 区间的分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k_n} = t$, 记分割的直径为 $\Delta$

$$
E\left(\int_0^t y_{s-}\,\mathrm{d}A_s - \int_0^t y_{s-}\mathrm{d}A'_s\right)
$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} E\sum_{j=0}^{k_n}\Big(y_{t_k}[(A_{t_{k+1}} - A'_{t_{k+1}}) - (A_{t_k} - A'_{t_k})]\Big)$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} E\sum_{j=0}^{k_n}\Big(y_{t_k}E\,[(A_{t_{k+1}} - A'_{t_{k+1}}) - (A_{t_k} - A'_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}]\Big)$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} E\sum_{j=0}^{k_n}\Big(y_{t_k}E\,[(m_{t_{k+1}} - m'_{t_{k+1}}) - (m_{t_k} - m'_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}]\Big)$$

$$= 0$$

因此，由定理 1.23, 引理 1.22 得到 $Ey_t(A_t - A'_t) = 0$, 取 $\xi = \mathrm{sgn}(A_t - A'_t), y_t = E\,(\xi|\mathcal{F}_t)$, 则得

$$E|A_t - A'_t| = E\,y_t(A_t - A'_t) = 0$$

所以 $A_t = A'_t$, 再由右连续性可知 $A$ 与 $A'$, 因而 $M$ 与 $M'$ 无区别.

4) 最后证明 $\{A_\infty(n)\}$u.i. $\Longleftrightarrow$ $\pi$ 类 D.

必要性：如上所证，如 $A_\infty(n)$ u.i., 则有 $0 \leqslant \pi_t = E\,(A_\infty|\mathcal{F}_t) - A_t, A_\infty = m_\infty$, 而由 Doob 停止定理 $\forall\tau \in \mathcal{J}, m_\tau = E\,(A_\infty|\mathcal{F}_\tau)$, 所以 $\pi_\tau \leqslant m_\tau = E\,(A_\infty|\mathcal{F}_\tau)$u.i..

充分性：回忆 $(1-24)$ 式：

$$\pi_{i2^{-n}} = E\,(A_\infty(n)|\mathcal{F}_{i2^{-n}}) - A_{i2^{-n}}(n)$$

$A_{(i+1)2^{-n}} \in \mathcal{F}_{i2^{-n}}$. 对任意的 $\lambda > 0$, 时变

$$\tau_{n,\lambda} \triangleq \inf\left\{i2^{-n} : A_{(i+1)2^{-n}} > \lambda\right\}, \inf\varnothing = +\infty$$

是关于 $\mathcal{F}_{i2^{-n}}$ 的停时，因此 $\tau_{n,\lambda} \in \mathcal{F}_{\tau_{n,\lambda}}$. 由 $(1-22)$ 式

$$\pi_{\tau_{n,\lambda}} = E\,(A_\infty(n)|\mathcal{F}_{\tau_{n,\lambda}}) - A_{\tau_{n,\lambda}}(n)$$

故

$$\begin{aligned}&\int_{(A_\infty(n)>\lambda)} A_\infty(n)\,\mathrm{d}P\\&=\int_{(A_\infty(n)>\lambda)} A_{\tau_{n,\lambda}}(n)\,\mathrm{d}P+\int_{(A_\infty(n)>\lambda)} \pi_{\tau_{n,\lambda}}\,\mathrm{d}P\\&\leqslant \lambda P(A_\infty(n)>\lambda)+\int_{(\tau_{n,\lambda}<\infty)} \pi_{\tau_{n,\lambda}}\mathrm{d}P\end{aligned}\tag{1-29}$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_{(A_\infty(n)>2\lambda)} (A_\infty(n)-\lambda)\mathrm{d}P\\&\leqslant \int_{(A_\infty(n)>\lambda)} (A_\infty(n)-\lambda)\mathrm{d}P\\&\leqslant \int_{(\tau_{n,\lambda}<\infty)} \pi_{\tau_{n,\lambda}}\mathrm{d}P\end{aligned}$$

这样

$$\lambda P(A_\infty(n)>2\lambda)\leqslant \int_{(\tau_{n,\lambda}<\infty)} \pi_{\tau_{n,\lambda}}\,\mathrm{d}P$$

在 (1 − 29) 式中以 $2\lambda$ 代 $\lambda$ 得到

$$\begin{aligned}&\int_{(A_\infty(n)>2\lambda)} A_\infty(n)\,\mathrm{d}P\\&\leqslant 2\int_{(\tau_{n,\lambda}<\infty)} \pi_{\tau_{n,\lambda}}\,\mathrm{d}P+\int_{(\tau_{n,2\lambda}<\infty)} \pi_{\tau_{n,2\lambda}}\,\mathrm{d}P\end{aligned}\tag{1-30}$$

注意到

$$P(\tau_{n,\lambda} < \infty) = P(A_\infty(n) > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} E\, A_\infty(n)$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} E\, \pi_0 \to 0,\ (\lambda \to 0)$$

由 $\pi$ 类 $D$,(1 − 30) 式的右边对 $n$ 一致趋于 0, 因此

$$\sup_n \int_{(A_\infty(n) > 2\lambda)} A_\infty(n)\, \mathrm{d}P \to 0,\ (\lambda \to \infty)$$

这就是 $(A_\infty(n))$ 的一致可积性. 至此定理证毕. □

**1.25定理** 设 $X = (X_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 为右连续上鞅且类 $D$, 则存在右连续的一致可积鞅 $M = (M_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 以及可积的自然增过程 $A = (A_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 使得

$$X_t = M_t - A_t,\ t \geqslant 0 \tag{1-31}$$

且在 a.s. 的意义下, 分解是唯一的.

**证明** 由于 $X$ 类 $D$, 特别有 $\sup_t E|X_t| < \infty$, 因而由鞅收敛定理, 存在可积的随机变量 $X_\infty$, 使得 $X_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} X_t$. 记 $\widetilde{m}_t = E(X_\infty|\mathcal{F}_t)$ 的右连续修正, 令 $\pi_t = X_t - \widetilde{m}_t$, 则过程 $\pi_t$ 将是一个右连续类 $D$ 的位势. 由定理 1.24 我们有

$$E(X_\infty|\mathcal{F}_t) + E(A_\infty|\mathcal{F}_t) - A_t$$

其中 $(A_t)$ 是可积的自然增过程, $m_t = E(A_\infty + X_\infty|\mathcal{F}_t)$ 是一致可积鞅, 而从位势分解的唯一性得到 Doob-Meyer 分解的唯一性.

□

如果右连续上鞅 $X$ 只是类 $DL$, 那么对任意的 $a<\infty$, 限于 $a$ 的上鞅 $X^a=(X_t:t\leqslant a)$ 类 $D$, 因此有 Doob-Meyer 分解

$$X^a=M^a-A^a$$

这里的 $M_t^a=E(X_a+A_a|\mathcal{F}_t),t\leqslant a$, 而 $A^a=(A_t:t\leqslant a)$ 是自然增过程, 且 $EA_a<\infty$. 对于 $b>a$, 则

$$X^b=M^b-A^b$$

有分解的唯一性, 对于 $t\leqslant a$, 有 $M_t^b=M_t^a,A_t^b=A_t^a$.

从而我们有

**1.26推论** 设 $X=(X_t,\mathcal{F}_t),t\geqslant 0$ 为右连续类 $DL$ 上鞅, 则存在自然增过程 $A=(A_t,\mathcal{F}_t),t\geqslant 0,\forall t,EA_t<\infty$, 使得 $X_t=M_t-A_t$. 其中 $(M_t),t\geqslant 0$ 只是鞅.

下鞅的 Doob-Meyer 分解对随机积分的建立有直接的应用, 它可直接由上鞅的分解得出.

**1.27定理** 设 $X=(X_t,\mathcal{F}_t),t\geqslant 0$ 为类 $D$ 下鞅, 则存在一致可积鞅 $M=(M_t,\mathcal{F}_t)$, 以及可积的自然增过程 $A=(A_t,\mathcal{F}_t),t\geqslant 0$, 使得

$$X_t=M_t+A_t,\ t\geqslant 0 \text{ a.s..}$$

且分解在 a.s. 的意义下唯一.

如果将上面的类 $D$ 条件改为类 $DL$, 则 $M$ 只是鞅, $A$ 只是自然增过程, $\forall t\geqslant 0,EA_t<\infty$.

最后给出分解中何时 $A$ 为连续的条件.

**1.28定义** 称位势 $(\pi_t)$**正则** 如果对于任意的停时列 $\tau_n\uparrow\tau<\infty$a.s., 有 $\lim\limits_{n\to\infty}E\pi_{\tau_n}=E\pi_\tau$.

**1.29定理** 设 $\pi$ 为类 $D$ 右连续位势 (上鞅)， $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，则 Doob-Meyer 分解中的 $(A_t)$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 位势 (上鞅) 正则.

**证明** 必要性：设 $(A_t)$ 连续，如 $\tau_n \uparrow \tau$, 则 $A_{\tau_n} \to A_\tau$, 由控制收敛定理 $E A_{\tau_n} \to E A_\tau$.

充分性：设 $\pi$ 正则， $0 < \tau \in \mathcal{J}, \tau_n \uparrow \tau$, 往证 $\lim\limits_{n\to\infty} A_{\tau_n} = A_\tau$, 因为 $A_{\tau_n} \leqslant A_\tau$, 故只要证 $\lim\limits_{n\to\infty} E A_{\tau_n} = E A_\tau$. 这可由 $\pi$ 的正则性以及分解中 $M$ 为一致可积鞅而得. □

## §1.4 过程与测度的投影

本节我们讨论现代随机过程论的重要内容：随机过程的可选与可料投影以及测度的可选与可料投影，首先介绍可选与可料过程的概念.

以下出现的 $\sigma$ 代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 总假定为满足通常条件.

**1.30定义** 称

$$\mathcal{R} = \{(s,t] \times F, \{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0.F \in \mathcal{F}_s\}$$

中的集为**可料矩形**，记 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{R}$ 生成的环，称由 $\mathcal{R}$ 生成的 $\sigma$ 代数为 $\mathcal{P}$, 称为**可料 $\sigma$ 代数**. 称实值随机过程 $X$ 为**可料过程**，如果它关于 $\mathcal{P}$ 可测，亦即对任意的 $B \in B(R), X^{-1}(B) \in \mathcal{P}$, 简记为 $X \in \mathcal{P}$. 对于任意的 $A \in \mathcal{R}, \forall t, I_A(t,\omega) \in \mathcal{F}_t$, 因此可料过程是适应过程.

对于任意的 $\tau, \sigma \in \mathcal{J}$, 称各种区间 $[\tau,\sigma], (\tau,\sigma]$ 为**随机区间**，其含义为

$$[\tau,\sigma] = \{(t,\omega) \in R_+ \times \Omega : \tau \leqslant t \leqslant \sigma\}$$

其它形式的随机区间 $(\tau,\sigma], (\tau,\sigma)$ 意义自明.

注意随机区间不含 $(\infty,\omega)$ 之类的点.

**1.31定义** 称

$$\mathcal{O}=\sigma(\text{一切随机区间})$$

为 **可选 $\sigma$ 代数**，关于 $\mathcal{O}$ 可测的过程，称为 **可选过程**. 如 $A$ 是一个随机区间，则 $I_A(t,\omega)\in\mathcal{F}_t,\forall t$. 因此可选过程也是适应过程.

由于 $(s,t]\times F=(s,\tau]$, 其中 $\tau=sI_{F^c}+tI_F$, 而

$$\{0\}\times F_0=\bigcap_n[0,\tau_n)$$

其中

$$\tau_n=\frac{1}{n}I_{F_0}+0\cdot I_{F_0^c}$$

因此

$$\mathcal{P}\subseteq\mathcal{O}$$

记号 $\sigma(c.),\sigma(r.c.),\sigma(l.c.),\sigma(l.c.r.l.)$ 分别表示由适应的连续，右连续，左连续，左连右极过程产生的 $\sigma$ 代数.

**1.32定理** 任何左连续适应过程是可料过程，

$$\sigma(\text{l.c.})=\sigma(\text{l.c.r.l.})=\mathcal{P}.$$

**证明** 设 $X$ 为左连续适应过程， $\forall n$, 令

$$X_s^n=X_0I_{[s=0]}+\sum_{k=0}^{\infty}X_{k2^{-n}}I_{(k2^{-n}<s\leqslant(k+1)2^{-n})}$$

则对任意的 $A\in\mathcal{B}(R)$,

$$\begin{aligned}(X^n)^{-1}(A)&=\{0\}\times X_0^{-1}(A)\\&\quad\cup\bigcup\big((k2^{-n},(k+1)2^{-n}]\times X_{k2^{-n}}^{-1}(A)\big)\end{aligned}$$

由于 $\forall t, X_t \in \mathcal{F}_t$, 因此 $X^n \in \mathcal{P}$. 而由左连续性, $\lim\limits_{n\to\infty} X^n(s,\omega) = X(s,\omega)$, 故 $X \in \mathcal{P}$, 此即 $\sigma(l.c.) \subseteq \mathcal{P}$. 另外, 可料矩形的示性函数为左连右极适应过程, 故 $\mathcal{P} \subseteq \sigma(\text{l.c.r.l.}) \subseteq \sigma(\text{l.c.})$. 从而 $\sigma(l.c.) = \sigma(\text{l.c.r.l.}) = \mathcal{P}$. □

**1.33定理** $\sigma(l.c.r.l.) \subseteq \sigma(c.)$.

**证明** 只要证明每个有界的左连右极适应过程是连续适应过程在 $R_+ \times \Omega$ 上的极限. 为此, 我们扩充左连右极过程 $X$ 的定义: 在 $X_s = 0, s < 0$. 对每个固定的 $n, t \geqslant 0, \forall m \in N$, 令

$$
\begin{aligned}
Y^m(s,\omega) &= I_{\{t-n^{-1}\}}(s) X_{t-n^{-1}}(\omega) \\
&\quad + \sum_k I_{(k2^{-m},(k+1)2^{-m}]}(s) X_{k2^{-m}}(\omega)
\end{aligned}
$$

其中 $k$ 为满足 $k2^{-m} \in [t-n^{-1}, t]$ 的自然数, $Y^m \in \mathcal{B}([t-n^{-1}, t]) \times \mathcal{F}_t$. 则当 $(s,\omega) \in [t-n^{-1}, t] \times \Omega$ 时, 由 $X$ 的左连续性, $Y^m \to X$, 因此 $X \in \mathcal{B}([t-n^{-1}, t]) \times \mathcal{F}_t$. 因为 $X$ 左连右极,

$$
X_t^n(\omega) = n \int_{t-n^{-1}}^{t} X(s,\omega)\,\mathrm{d}s
$$

对每个 $\omega$, 以及充分大的 $n$ 有定义, $X \in \mathcal{B}([t-n^{-1}, t]) \times \mathcal{F}_t$, 由 Fubini 定理, $X_t^n \in \mathcal{F}_t, X_t^n$ 在 $t$ 处连续, 故 $X_t^n \in \sigma(\text{c.})$ 而 $X^n \to X$, 因此 $X \in \sigma(\text{c.})$. □

由上面两个定理,

$$
\sigma(\text{c.}) \subseteq \sigma(\text{l.c.}) = \mathcal{P} = \sigma(\text{l.c.r.l.}) \subseteq \sigma(\text{c.})
$$

也即, 适应的连续过程, 适应的左连续过程, 适应的左连右极过程均生成 $\mathcal{P}$.

容易证明 $\mathcal{O}=\sigma([\tau,\infty):\tau\in\mathcal{J})$, 随机区间 $[\tau,\infty)$ 的示性函数是右连左极适应过程，因此 $\mathcal{O}\subseteq\sigma(\text{r.l.l.l.})$, 下面的定理 1.35 给出了反包含.

**1.34引理** 设 $X$ 为右连续适应过程 ,$\tau,\sigma\in\mathcal{J}$, 则

(1) $Y\triangleq X_\tau I_{[\tau<\infty]}\in\mathcal{F}_\tau$;

(2) $YI_{[\tau,\sigma)}$ 为可选过程.

**证明** 1) 已知，往证 2). 只要对 $A\in\mathcal{F}_\tau, Y=I_A$ 来证明. 令 $\tau_A,\sigma_A$ 分别为停时 $\tau,\sigma$ 在 $A$ 上的限制，则

$$I_AI_{[\tau,\sigma)}=I_{[\tau_A,\sigma_A)}$$

$\tau_A,\sigma_A\in\mathcal{J}$, 故 $I_{[\tau_A,\sigma_A)}\in\mathcal{O}$, 从而 $YI_{[\tau,\sigma)}\in\mathcal{O}$. □

**1.35定理** $\sigma(\text{r.c.l.l.})=\mathcal{O}$.

**证明** 往证 $\sigma(\text{r.c.l.l.})\subseteq\mathcal{O}$, 为此我们将证明任意的右连左极适应过程 $X$ 是一列可选过程 $X^n$ 的极限. 令

$$\tau_0^n=0$$
$$\tau_{k+1}^n=\inf\left\{s>\tau_k^n:|X_s-X_{\tau_k^n}|>\frac{1}{n}\right\},k\in N_0,$$

则可归纳证明每个 $\tau_k^n\in\mathcal{J}$: $\tau_0^n\in\mathcal{J}$, 如 $\tau_k^n\in\mathcal{J}$, 则

$$\{\omega:\tau_{k+1}^n<t\}=\{\tau_k^n<t\}$$
$$\cap\bigcup_{s\in Q\cap(0,t)}\left((\tau_k^n<s)\cap\left\{|X_s-X_{\tau_k^n\wedge t}|>\frac{1}{n}\right\}\right)$$

由于 $X_{\tau_k^n\wedge t}\in\mathcal{F}_t$, 因此 $\{\tau_{k+1}^n<t\}\in\mathcal{F}_t$, 由于 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，故 $\tau_k^n\in\mathcal{J}$.

由于 $X$ 右连续，在 $\{\tau_{k+1}^n<\infty\}$ 上，有

$$|X_{\tau_{k+1}^n}-X_{\tau_k^n}|\geqslant\frac{1}{n}\tag{1-32}$$

这表明 $\tau_k^n<\tau_{k+1}^n$，而由 (1−32) 式，可见 $\{\tau_k^n:k\in N_0\}$ 没有有限的极限点，否则与 $X$ 存在有限的左极限矛盾，这样 $\tau_k^n\uparrow\infty\,(k\to\infty)$.

$\forall n$，令

$$X^n=\sum_{k=0}^{\infty}X_{\tau_k^n}I_{[\tau_k^n,\tau_{k+1}^n)}$$

由引理 1.34, $X^n$ 是可选过程，且由 $\tau^k$ 的定义 $|X-X^n|<n^{-1}$，因此 $X=\lim\limits_{n\to\infty}X^n$ 为可选过程. □

**1.36注：** 上面的证明可修改来证明 $\sigma(\text{r.c.})\subseteq\mathcal{O}$，见文献 [5]pp58.

如果 $X$ 为右连续适应过程，则 $X$ 为循序过程，

$$\sigma(\text{r.c,})\subseteq\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}.$$

以上结果表明

$$\begin{aligned}\mathcal{P}&=\sigma(c.)=\sigma(l.c.r.l.)=\sigma(l.c.)\subseteq\mathcal{O}\\&=\sigma(r,c.l.l.)=\sigma(r.c.)\subseteq\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}\end{aligned}$$

下面命题表明某些随机区间是可料的.

**1.37命题** $\forall\tau,\eta\in\mathcal{J},[0,\tau],(\eta,\tau]$ 均为可料集.

**证明** 只要证 $[0,\tau]\in\mathcal{P},\forall n\in N$，令

$$\tau_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^n}I_{(\frac{k}{2^n}\leqslant\tau<\frac{k+1}{2^n}]}$$

则 $\tau_n \downarrow \tau, [0,\tau] = \cap[0,\tau_n]$. 而

$$[0,\tau_n] = (\{0\}\times\Omega)\cup\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\times\left\{\tau\geqslant\frac{k}{2^n}\right\}$$

由于 $(\omega:\tau\geqslant\frac{k}{2^n}) = \left(\tau<\frac{k}{2^n}\right)^c \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$, 所以, $[0,\tau]\in\mathcal{P}$. □

**1.38定义** 称 $\mathcal{F}$ 可测函数 $\tau:\Omega\to R_+$ 为 **可料时**, 如果存在停时 $\tau_n\uparrow\tau$, a.s. 使得在 $[\tau>0]$ 上, $\tau_n<\tau$. 此时称 $(\tau_n)$ 为 a.s. 预报可料时 $\tau$ 的停时列.

我们这里可料时的定义与文献 [1] 不同, 那里把具有 $[\tau,\infty)\in\mathcal{P}$ 性质的停时称为可料时, 并且证明了 (文献 [1]4.18 定理) 一切可料时是 a.s. 可预报的. 而下面证明了 1.39(3), 所以两个定义等价.

易证每个可料时为停时; 如果 $\tau$ 为停时, 则对常数 $t>0, \tau+t$ 是可料时, 事实上 $\tau+t-\dfrac{t}{n}\triangleq\tau_n\uparrow\tau+t$, 且$\tau_n$ 为停时.

直观地, 如果 $\tau>0$ 表示某一随机事件发生的时刻, 则 $\tau$ 为可料时, 表明这个事件的发生, 不会令我们惊奇, 因为一列 $\tau_n$ 事件的发生, 将会告知 $\tau$ 的发生.

**1.39命题**

(1) $\tau$ 可料, 则 $[\tau,\infty)\in\mathcal{P}$;

(2) 所有以可料时为端点的随机区间都是可料集;

(3) $\sigma([\tau,\infty):\tau$为可料时$)=\mathcal{P}$;

(4) $\mathcal{O}=\sigma(\mathcal{C})$, $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{C}_f)=\sigma(\mathcal{C}_b)$. 其中 $\mathcal{C}=\{[0_F], F\in\mathcal{F}_0; (\sigma,\tau]:\sigma,\tau\in\mathcal{J}\}$, 而当将上述 $\sigma,\tau$ 限定为只取有限个值的停时, 或只取有界值的停时, 则分别记 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}_f$ 或相应地 $\mathcal{C}_b$.

**证明** 往证 1) 设 $\tau_n$ 预报 $\tau$, 则

$$[\tau,\infty)=(\{0\}\times[\tau=0])\cup(\bigcap_n(\tau_n,\infty))$$

因为 $\tau=0\in\mathcal{F}_0$, 以及 $(\tau_n,\infty)=R_+\times\Omega\backslash[0,\tau_n]\in\mathcal{P}$, 而由命题 1.37, $[0,\tau_n]\in\mathcal{P}$, 故 $[\tau,\infty)\in\mathcal{P}$.

2) 对 $\tau\in\mathcal{P}$, 则由命题 1.37, $[0,\tau]\in\mathcal{P}$, 而 $[0,\tau)=[\tau,\infty)^c\in\mathcal{P}$. 其它随机区间如 $(\tau,\sigma)=[0,\sigma)\backslash[0,\tau]\in\mathcal{P}$, 同时称为可料时图的 $[\tau]=[0,\tau]\backslash[0,\tau)\in\mathcal{P}$.

3) 记 $\mathcal{Q}=\sigma([\tau,\infty):\tau$为可料时$)$, 由 1) 可见 $\mathcal{Q}\subseteq\mathcal{P}$, 往证 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{Q}$. 为此只要证 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{Q}$.

$\forall\tau\in\mathcal{J},[0,\tau]=\cap_n\left[0,\tau+\dfrac{1}{n}\right)$, 而 $\tau+\frac{1}{n}$ 为可料时，因此由 (1), $[0,\tau+\frac{1}{n})\in\mathcal{Q}$, 于是 $[0,\tau]\in\mathcal{Q}$. 所以, 每个可料矩形 $(s,t]\times F=(s_F,t_F]=[0,t_F]\backslash[0,s_F]\in\mathcal{Q}$; 而 $\{0\}\times F_0=[0_{F_0},\infty)\backslash(0_{F_0},\infty)\in\mathcal{Q}$.

4) 往证 $\mathcal{O}=\sigma(\mathcal{C})$. 因为 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}_f$, 又 $(\sigma,\tau]=[0,\tau]\backslash[0,\sigma]$, 由命题 1.37, $[0,\tau],[0,\sigma]\in\mathcal{P}$, 故 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}$, 而 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}_f\subseteq\mathcal{C}_b\subseteq\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}$, 所以

$$\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{R})=\sigma(\mathcal{C}_f)=\sigma(\mathcal{C}_b)=\sigma(\mathcal{C}).$$

□

由此可见，对于 $\tau\in\mathcal{J}$, 则 $[\tau,\infty)\in\mathcal{O}$, 而对于可料时 $\tau$, 则 $[\tau,\infty)\in\mathcal{P}$. 其实其逆也真. 对于常数 $a,b$, 它们既是停时又是可料时， $[a,b]$ 也可看成是随机区间，因此 $I_{[a,b]}=I_{[a,b]\times\Omega}$ 既是可选过程又是可料过程.

**1.40命题** 设 $\tau\in\mathcal{J}$, 如果 $X$ 可选 (或可料)，则 $X^\tau$ 也将可选 (或可料).

**证明** 由于

$$X^\tau = XI_{[0,\tau]} + X_\tau I_{(\tau,\infty)}$$

左连续过程 $I_{(\tau,\infty)} \in \mathcal{P}$, 故 $I_{[0,\tau]} \in \mathcal{P}$. 因此, $XI_{[0,\tau]} \in \mathcal{O}$, (或$\mathcal{P}$) $\Longleftrightarrow$ $X \in \mathcal{O}$, (或$\mathcal{P}$). 而

$$Y = X_\tau I_{(\tau,\infty)} = X_\tau I_{(\tau<\infty)} I_{(\tau,\infty)}$$

注意到 $X_\tau I_{(\tau<\infty)} \in \mathcal{F}_\tau$, 故 $Y$ 为左连续适应过程, 因而为可料过程. 所以 $X^\tau$ 可选 (或可料) 等价于 $X$ 可选 (或可料). □

一个随机过程进入某 Borel 可测集的随机时刻是今后经常要研究的, 我们称为 **初遇**. 即称

$$\tau_B(\omega) \triangleq \inf\{t : X(t,\omega) \in B\},\ B \in \mathcal{B}(R)$$

为初遇或首达时. 当 $X$ 分别是可测, 可选或可料过程时 ,$A \triangleq X^{-1}(B)$ 分别属于 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}, \mathcal{O}$ 或 $\mathcal{P}$. 对于 $A \subsetneq R_+ \times \Omega$, 集合 $A$ 的初遇

$$D_A(\omega) = \inf\{t : (t,\omega) \in A\}$$

我们有

$$\{\omega : D_A(\omega) < t\} = \Pi(A \cap [0,t) \times \Omega)$$

其中 $\Pi$ 表示向 $\Omega$ 的投影. 为了研究 $\tau_B$ 或 $D_A$ 的可测性质, 需要容度与解析集的理论. 下面不加证明地给出我们需要的结果.

**1.41命题** 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间, 则对一切可测集 $A \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}, \Pi(A) \in \mathcal{F}$.

**1.42命题** 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间, $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件, 则 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 可测集的初遇为 $\mathcal{F}$ 可测, 而循序集的初遇为 $(\mathcal{F}_t)$ 为停时.

截口定理表明可选 (可料) 过程的轨道将被它们在停时 (对应地, 可料时) 的取值所确定. 截口定理的证明要依赖于容度与解析集的理论, 我们省去它的证明, 读者可参考文献 [1].

**1.43定理** 设 $A$ 是可选集 (可料集), 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在停时 (可料时)$\tau$, 使得

(1)$[\tau] \subseteq A$;

(2)$P(\tau < \infty) \geqslant P(\Pi(A)) - \epsilon$.

其中 $\Pi(A)$ 表示 $A$ 在 $\Omega$ 上的投影, 而 $[\tau] = \{(t,\omega) : t = \tau(\omega)\}$ 称为停时 $\tau$ 的图.

设 $A \in \mathcal{F}(R_+) \times \mathcal{F}$, 如 $P(\pi(A)) = 0$, 则称 $A$ 为 **不足道集** , $I_A$ 为 **不足道过程**. 下面就是截口定理的应用.

**1.44定理** 设 $X = (X_t), Y = (Y_t)$ 为两个可选 (或可料) 过程, 如对每个有界停时 (可料时)$\tau$, 有 $X_\tau \leqslant Y_\tau$, 则 $X \leqslant Y$.

**证明** 只证可选情形, 用反证法. 设 $A = \{(t,\omega) : X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$ 为非不足道的可选集, 则由截口定理存在停时 $\sigma$, 使 $[\sigma] \subseteq A$, 且 $P(\sigma < \infty) > 0$. 于是可取常数 $C > 0$, 使 $P(\sigma \leqslant C) > 0$. 令 $\tau = \sigma \wedge C$, 则 $\tau$ 为有界停时, 且在 $\sigma \leqslant C$ 上, $\tau = \sigma$, 从而 $[\tau] \cap (R_+ \times (\sigma \leqslant C)) \subseteq [\sigma] \subseteq A$. 此即 $X_\tau > Y_\tau$, 与假设矛盾. 所以 $A$ 为不足道集, 亦即 $X \leqslant Y$. □

由此可知

**1.45推论** 设 $X, Y$ 为两个可选 (可料) 过程, 如对每个有界停时 (可料时) $\tau, X_\tau = Y_\tau$,, 则 $X$ 与 $Y$ 无区别.

有时不易验证对每个停时或可料时 $\tau$ 的 $Y_\tau = Y_\tau$, 下面给出更方便的条件.

**1.46定理** 设 $X, Y$ 为两个可选 (可料) 过程, 如果对任意的停

时 (可料时)$\tau, X_\tau I_{\tau<\infty}$ 及 $Y_\tau I_{\tau<\infty}$ 可积, 且 $EX_\tau I_{\tau<\infty} \leqslant EY_\tau I_{\tau<\infty}$, 则 $X \leqslant Y$.

**证明** 只讨论可选情形. 设 $A=\{(t,\omega): X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$ 非不足道集, 由截口定理存在停时 $\tau$, 使得 $[\tau] \subseteq A$, 且 $P(\tau<\infty)>0$. 此时有 $EX_\tau I_{\tau<\infty} > EY_\tau I_{\tau<\infty}$, 矛盾. □

现在讨论过程的投影. 为此先介绍 Doob 停止定理的可料形式.

我们称

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(A \cap (t<\tau) : A \in \mathcal{F}_t, t \in R_+)$$

为**严格 $T$ 前事件的 $\sigma$ 代数**. 从定义易知 $\tau \in \mathcal{F}_{\tau-}$, 且 $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

**1.47引理** 设 $\tau$, 为可料时, 若 $\tau_n$ 是预报 $\tau$ 的停时列, 则

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \bigvee \mathcal{F}_{\tau_n} \qquad (1-33)$$

这里及今后, $\bigvee \mathcal{F}_{\tau_n} = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_{\tau_n})$.

**证明** 由于 $(\tau>0) \subseteq (\tau_n<\tau)$, 所以 $\forall A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$,

$$\begin{aligned} A &= A \cap (\tau_n < \tau) \cap (\tau > 0 \cup A \cap (\tau=0) \\ &= \bigcup_{r_i \in Q} A \cap (\tau_n \leqslant r_i) \cap (r_i < \tau) \\ &\quad \cap (\tau>0) \bigcup A \cap (\tau=0) \end{aligned}$$

因为 $\forall A \in \mathcal{F}_\tau, A \cap (\tau=0) \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$, 而 $A \in \mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$, 故上面的 $A \cap (\tau=0) \in \mathcal{F}_{\tau-}$. 而另一个集合, 则由 $(\tau>0) \in \mathcal{F}_{\tau-}$ 以及 $\mathcal{F}_\tau$ 的定义, 也属于 $\mathcal{F}_{\tau-}$. 这就证明了 $\bigvee \mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$.

又 $\forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$A \cap (t<\tau) = \bigcup A \cap (t<\tau_n) \in \bigvee \mathcal{F}_{\tau_n}$$

因此，$\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \bigvee \mathcal{F}_{\tau_n}$，这就证明了 (1 − 33) 式. □

下面是 Doob 停止定理的可料形式，它是过程可料投影的基础.

**1.48定理** 设 $(X_t, t \in \overline{R_+})$ 为右连续上鞅 (鞅)，则对一切可料时 $T$ 及停时 $U \geqslant T$, 有

$$E\left(X_U | \mathcal{F}_{T-}\right) \leqslant X_{T-}, \ (= X_{T-})\text{a.s.}. \qquad (1-34)$$

**证明** 令 $(T_n)$ 为预报 $T$ 的停时列，则有

$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n}\right)$$

由停止定理

$$E\left(X_U | \mathcal{F}_{T_n}\right) \leqslant X_{T_n} \text{ a.s..}$$

令 $n \to \infty$, 得

$$E\left(X_U | \mathcal{F}_{T-}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(X_U | \mathcal{F}_{T_n}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_{T-}$$

(1-34) 式得证. □

过程的可料，可选投影是随机过程理论的重要内容，下面只对可料投影给出相应的证明，对于可选投影的证明是类似的.

**1.49定理** 设 $X$ 为可测过程，$\forall \tau \in \mathcal{J}$(可料时), $X_\tau I_{\tau<\infty}$ 关于 $\mathcal{F}_\tau(\mathcal{F}_{\tau-})$ 为 $\sigma$ 可积，则存在唯一的只取有限值的可选 (可料) 过程 ${}^oX({}^pX)$ 使得

$$E(X_\tau I_{\tau<\infty} | \mathcal{F}_\tau) = {}^o X_\tau I_{\tau<\infty}, \text{或相应地}$$
$$E(X_\tau I_{\tau<\infty} | \mathcal{F}_{\tau-}) = {}^p X_\tau I_{\tau<\infty} \qquad (1-35)$$

我们称此 ${}^oX({}^pX)$ 为 $X$ 的 **可选 (可料) 投影**.

**证明** 我们只证可料情形.

唯一性由截口定理得出 (见 th.1.45), 那里指出, 设 ${}^pX$ 与 $Y$ 均是 $X$ 的两个可料投影, 则对每个有界的可料时有 $\tau, {}^pX_\tau = Y_\tau$, 于是 ${}^pX$ 与 $Y$ 无区别. 因此可料投影若存在必唯一.

往证存在性. 我们从简单的过程开始.

1) 设 $X = \xi I_{[r,s)\times\Omega}$, 其中 $\xi$ 为有界随机变量, 令 ${}^pX \triangleq Y_- I_{[r,s)\times\Omega}$, 这里 $Y$ 为鞅 $E(\xi|\mathcal{F}_t)$ 的右连左极适应修正. 显然, ${}^pX$ 可料, 而由 Doob 停止定理的可料形式,

$$\begin{aligned} E(X_\tau I_{\tau<\infty}|\mathcal{F}_{\tau-}) &= I_{(r\leqslant\tau<s)}E(\xi|\mathcal{F}_{\tau-}) \\ &= I_{(r\leqslant\tau<s)}E\left(E\left(\xi|\mathcal{F}_\tau\right)|\mathcal{F}_{\tau-}\right) \\ &= I_{(r\leqslant\tau<s)}E(Y_\tau|\mathcal{F}_{\tau-}) = I_{(r\leqslant\tau<s)}Y_{\tau-} \\ &= {}^pX_\tau I_{\tau<\infty} \end{aligned}$$

这里用到 $Y_\tau = E(\xi|\mathcal{F}_\tau)$, 它可从对只取有限个值的停时 $S_n \downarrow \tau$, 有 $Y_{S_n} = E(\xi|\mathcal{F}_{S_n})$, 取极限而得.

2) 如将满足 (1 − 35) 式的可料投影看成为由 $X \to {}^pX$ 的算子, 显然它是保序 (在过程无区别意义下) 的线性算子, 且对于有界可测过程 $X$, 存在 $X^{(n)} \uparrow X$, 且每个 ${}^pX^{(n)}$ 存在, 于是 ${}^pX$ 存在且 ${}^pX = \lim\limits_{n\to\infty} {}^pX^{(n)}$, 因此一切有界可测过程的可料投影存在.

3) 对于一般的非负可测过程 $X$, 令 $X^{(n)} = X \wedge n$, 则除去一个不足道集外, ${}^pX^{(n)} \uparrow$. 在此不足道集外令 ${}^pX = \lim\limits_{n\to\infty} {}^pX^{(n)}$, 而

在此不足道集上令 ${}^pX=0$. 则对任何可料时 $\tau$, 我们有

$$\begin{aligned}E(X_\tau I_{\tau<\infty}|\mathcal{F}_{\tau-}) &= \lim_{n\to\infty} E\left(X_\tau^{(n)} I_{(\tau<\infty)}|\mathcal{F}_{\tau-}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} {}^pX_\tau^{(n)} I_{(\tau<\infty)}\\ &= {}^pX_\tau I_{\tau<\infty}\end{aligned}$$

且由 $X_\tau I_{\tau<\infty}$ 关于 $\mathcal{F}_{\tau-}$ $\sigma$ 可积, 可见 ${}^pX_\tau$ a.s. 有限.

4) 对于一般满足定理条件的可测过程 $X$, 我们有 ${}^pX={}^pX^+-{}^pX^-$. □

**注意!**

(1) 若 $X$ 为循序过程, 则由 $E(X_\tau I_{\tau<\infty}|\mathcal{F}_\tau)=X_\tau I_{\tau<\infty}$, 因为 $\forall\tau\in\mathcal{J}, X_\tau I_{\tau<\infty}\in\mathcal{F}_\tau$, 因此 $\Omega_n=\{|X_\tau|I_{\tau<\infty}\leqslant n\}\uparrow\Omega$, 从而 $E|X_\tau|I_{\tau<\infty}I_{\Omega_n}\leqslant n$, 故 $|X_\tau|I_{\tau<\infty}$ 关于 $\mathcal{F}_\tau$ 为 $\sigma$ 可积. 这样存在可选过程 ${}^oX$ 使得

$$X_\tau I_{\tau<\infty}={}^oX_\tau I_{\tau<\infty}$$

特别有 ${}^oX_t=X_t$, 这表明循序可测过程有可选修正, 当然更是适应可测的修正.

(2) 若对可测过程 $X$, 存在 ${}^oX$(或 ${}^pX$), 而 $Y$ 为可选 (相应地, 可料) 过程, 则有

$$ {}^o(XY)={}^oXY, \ (\text{相应地}\ {}^p(XY)={}^pXY) \qquad (1-36)$$

下面讨论测度的投影.

设 $A$ 为一增过程, 在 $\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}$ 上定义的

$$\mu_A(H)=E\left(\int_{[0,\infty)} I_H(\cdot,s)\,\mathrm{d}A_s(\cdot)\right), H\in\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F} \qquad (1-37)$$

为一测度，称为 **由增过程 $A$ 产生的测度**. 当 $EA_\infty < \infty$ 时，则 $\mu_A([0,\infty)\times\Omega) < \infty$, 我们称此 $\mu_A$ 为 **有界测度**.

**1.50定理** $\mu$ 为 $R_+\times\Omega$ 上 $\sigma$ 有限且在不足道集上无负荷 (即在不足道集上测度为 0) 的充要条件是 $\mu$ 由某增过程所产生. 而且此时产生 $\mu$ 的增过程唯一.

**证明** 充分性显然. 事实上由 $(1-37)$ 式，显然 $\mu_A$ 在不足道集上无负荷，令

$$\tau_n = \inf\{t \geqslant 0 : A_t \geqslant n\}$$

则 $[0,\tau_n) \in \mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}, \cup[0,\tau_n) = R_+\times\Omega$, 因为 $\mu_A([0,\tau_n)) \leqslant n$, 可见 $\mu_A$ 为 $R_+\times\Omega$ 上 $\sigma$ 有限测度.

必要性：令

$$Q_t(F) = \mu([0,t]\times F),\ F\in\mathcal{F} \qquad (1-38)$$

由于 $\mu$ 在 $\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}$ 上 $\sigma$ 有限, 则存在 $K_i \uparrow R_+\times\Omega, \mu(K_i) < \infty$. 于是初遇 $D_{K_i^c} \uparrow +\infty$, 故 $F_i = (D_{K_i^c} > t) \uparrow \Omega$, 且 $[0,t]\times F_i \subseteq [0,D_{K_i^c}] \subseteq K_i$. 所以 $Q_t(F_i) \leqslant \mu(K_i) < \infty$, 这表明 $Q_t$ 为 $\sigma$ 有限, 又由 $Q_t \ll P$, 可令 $A'_t = \dfrac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}P}$. 显然 $A'_t$ 关于 $t$ 为 a.s. 增函数. 设 $t_k \downarrow t$, 对一切 $n$, 令 $F_n = (A'_{t_k} \leqslant n)$, 则由

$$\begin{aligned} EI_{F_n}(\lim_{k\to\infty} A'_{t_k} - A'_t) &\leqslant \lim_{k\to\infty} EI_{F_n}(A'_{t_k} - A'_t) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(F_n\times(t,t_k]) = 0 \end{aligned}$$

而 $\cup_n F_n = \Omega$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} A'_{t_k} = A'_t$,a.s.. 令

$$A_t = \inf\{A'_r : r > t, r\in Q_+\},\ t \geqslant 0$$

则对一切 $t \geqslant 0, A_{t+} = A_t$, 且 $A_t = A'_t$,a.s.. 必要的话，在一零概集上修改轨道，可以使得 $A$ 为增过程，且对一切 $F \in \mathcal{F}$, 有

$$\mu(F \times [0,t]) = Q_t(F) = \int_F A_t \, \mathrm{d}P = E(I_F A_t)$$

$$= E\left[\int_{[0,\infty)} I_{F\times[0,t]}(s,\cdot)\,\mathrm{d}A_s(\cdot)\right]$$

这表明 $\mu$ 由 $A$ 产生.

若有另一增过程 $B$ 也产生 $\mu$, 则由 $B_t = \dfrac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}P} = A_t$, 又由它们两者均右连续，因此无区别. □

**1.51定义** $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 上的在不足道集上无负荷的测度 $\mu$ 称为是 **可选 (可料)** 测度，是指对一切非负有界可测过程 $X$ 有

$$\mu(X) = \mu({}^oX)\ (\mu(X) = \mu({}^pX))$$

其中 $\mu(X) = \int X \, \mathrm{d}\mu$.

由 (1 − 36) 式，容易证明：如果 $\mu$ 是可选 (可料) 测度，则对任意的有界可测过程 $X$, 我们有 ${}^oX = E_\mu(X|\mathcal{O}), {}^pX = E_\mu(X|\mathcal{P})$.

**1.52定理** 设 $A$ 为增过程，则 $\mu_A$ 为可选 (可料) 测度的充要条件是 $A$ 为适应 (可料) 过程.

**证明** 充分性：设 $A$ 适应 ,$(C_t)$ 为与 $A$ 相联系的时变，则对非负有界可测过程 $X$, 我们有

$$E\left[\int_{[0,\infty)} X_s \, \mathrm{d}A_s\right] = E\left[\int_0^\infty X_{C_s} I_{(C_s<\infty)} \, \mathrm{d}s\right]$$

$$= \int_0^\infty E\left[X_{C_s} I_{(C_s<\infty)} \mathrm{d}s\right]$$

$$= \int_0^\infty E\left[{}^oX_{C_s} I_{(C_s<\infty)}\, \mathrm{d}s\right]$$

$$= E\left[\int_{[0,\infty)} {}^oX_s \mathrm{d}A_s\right] \tag{1 - 39}$$

这里第一个等式是因为对 a.s. 的 $\omega, X_s$ 是非负有界 Borel 可测函数，利用单调类定理可以证明在取期望前两边相等，因而第一等号成立．第二个等号可由 Fubini 定理而得．(1 − 39) 式正是 $\mu_A(X) = \mu_A({}^oX)$, 故 $\mu_A$ 可选．

若 $A$ 可料，注意到 $C_{t-} = \inf\{s \geqslant 0 : A_s \geqslant t\}$, 则可证明 $C_{t-}$ 为可料时．事实上， $C_{t-} = \lim\limits_{n\to\infty} C_{t-n^{-1}}$, 而后者为停时列．其余的证明类似．

必要性：设 $\mu_A$ 可选，取 $X = I_F I_{[0,t]\times\Omega}, F \in \mathcal{F}$, 后一个示性函数是可选过程，故

$$\begin{aligned} E(A_t I_F) &= \mu_A(X) = \mu_A({}^oX) \\ &= E({}^oI_F A_t) = E\left(A_t E\left(I_F|\mathcal{F}_t\right)\right) \\ &= E\left(E\left(A_t|\mathcal{F}_t\right) E\left(I_F|\mathcal{F}_t\right)\right) \\ &= E(E\left(A_t|\mathcal{F}_t\right) I_F) \end{aligned}$$

所以 $A_t = E\left(A_t|\mathcal{F}_t\right)$ a.s., 即 $A$ 适应．

至于 $\mu_A$ 可料导致 $A$ 可料的证明可见文献 [1]th.5.13. □

**1.53定义** 设 $\mu$ 为 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 上 $\sigma$ 有限，且在不足道集上无负荷．对任意的非负有界可测过程，令

$$\mu^o(X) = \mu({}^oX),\ \mu^p(X) = \mu({}^pX)$$

则 $\mu^o,\mu^p$ 分别为可选，可料测度且在不足道集上无负荷 (但未必 $\sigma$ 有限)，我们称 $\mu^o,\mu^p$ 为 $\mu$ 的 **可选，可料投影**.

如果 $\mu=\mu_A$ 为某个增过程 $A$ 所产生，那么就有 $\mu_A$ 的可选或可料投影 $\mu^o,\mu^p$. 因为它们未必 $\sigma$ 有限，所以不能保证它们一定分别为某增过程所产生. 如果 $\mu^o$ 为一增过程 $B$ 所产生，那么由 1.52 定理， $B$ 必为适应增过程. 类似地，如果 $\mu^p$ 为一增过程 $C$ 所产生，则 $C$ 必为可料增过程. 我们分别称这样的 $B$ 为 $A$ 的可选对偶投影，记 $B=A^o$; 而称 $C$ 为 $A$ 的 **可料对偶投影** ，记 $C=A^p$. 显然当 $A$ 本身为适应增过程，则 $A^o=A$; 当 $A$ 本身为可料增过程，则 $A^p=A$. 对于一般的增过程 $A$, $A^o(A^p)$ 存在的充要条件是 $A$ 为所谓的准局部可积 (局部可积). 详细的表述可见文献 [1]th.5.20.

**1.54定理** 1) 设 $A$ 为一适应增过程, 对一切 $t\geqslant 0, A_t$ 可积, 则为要 $A$ 可料，当且仅当 $A$ 为自然增过程;

2) 设 $A$ 为一适应可积增过程，则为要 $A$ 可料，当且仅当 $A$ 为可积自然增过程，也当且仅当

$$E\int_0^\infty M_s\,\mathrm{d}A_s=E\int_0^\infty M_{s-}\,\mathrm{d}A_s \qquad (1-40)$$

**证明** 1) 必要性：设 $A$ 可料，则由 1.52 定理， $\mu_A$ 为可料测度. 因此对非负右连左极鞅 $M, T\geqslant 0$, 有

$$\mu_A(I_{[0,T]}M)=\mu_A({}^p(I_{[0,T]}M))=\mu_A(I_{[0,T]}\,{}^pM)$$

而 ${}^pM=M_-$, 这就得到 $(1-22)$ 式，因此 $A$ 为自然增过程.

往证充分性：首先假定 $A$ 可积，令

$$\mathcal{C}=\{[0,t]\times F: t\geqslant 0, F\in\mathcal{F}\}$$

则 $\mathcal{C}$ 为 $\pi$ 系, $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}$. 记 $C=[0,t]\times F, M$ 为鞅 $E(I_F|\mathcal{F}_t)$ 的右连左极修正, 则

$$^oI_C=MI_{[0,t]\times\Omega},\ ^pI_C=M_-I_{[0,t]\times\Omega}$$

由于 $A$ 适应, 故 $\mu_A$ 可选, 而且因为 $A$ 为可积的自然增过程, (1 − 22) 式成立, 所以

$$\mu_A(I_C)=\mu_A(^oI_C)=\mu_A(^pI_C)$$

令

$$\mathcal{G}=\{C\in\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}:\mu_A(I_C)=\mu_A(^pI_C)\}$$

则 $\mathcal{G}$ 为 $\lambda$ 类, 且 $\mathcal{G}\supseteq\mathcal{C}$, 从而 $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{F}$. 此即 $\mu_A$ 可料, 故 $A$ 为可料过程.

对一般情形, 令 $A^n=A\wedge n$, 则 $A^n$ 可积, 从而 $A^n$ 可料, 故 $A$ 可料.

2) 由 1),$A$ 可积可料等价于 $A$ 为可积的自然增过程. 若 $M$ 为非负有界右连左极鞅, 则 $M'=MI_{[0,t]}+M_tI_{(t,\infty)\times\Omega}$ 也是非负有界右连左极鞅. 而

$$E\int_0^T M_s\,\mathrm{d}A_s+E\,M_T(A_\infty-A_T)=E\int_0^\infty M'_s\,\mathrm{d}A_s$$

同理

$$E\int_0^T M_{s-}\,\mathrm{d}A_s+E\,M_T(A_\infty-A_T)=E\int_0^\infty M'_{s-}\,\mathrm{d}A_s$$

因此, (1 − 40) 式对 $M'$ 成立当且仅当 (1 − 20) 式对 $M$ 成立, 当且仅当 $A$ 为可积自然增过程 (定理 1.23). □

今后我们将把 Doob-Meyer 分解定理中的自然增过程, 改称为可料增过程.

# 习题与问题一

1.1 证明定理 1.3.

1.2 证明 1.10 系.

1.3 如果对于取值于 $[0,\infty)$ 的随机变量，满足 $\forall t \in R_+, \{\omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$, 则称它为宽停时，证明若 $\tau$ 为停时，则必为宽停时；而当 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，宽停时即停时.

1.4 设 $(A_t, \mathcal{F}_t), t \in R$ 为适应增过程， $C_t$ 为与增过程 $A_t$ 相联系的时变，往证当 $\mathcal{F}_t$ 右连续时，

$$\sup\{t : C_t \leqslant s\} = \inf\{t : C_t > s\}$$

1.5 证明 $(1-22)$ 式.

1.6 证明可选 $\sigma$ 代数 $\mathcal{O} = \sigma\{[\tau,\infty) : \tau \in \mathcal{J}\}$.

1.7 证明 $\sigma(r.c.) \subseteq \mathcal{O}$.

1.8 证明定理 1.49 之可选投影部分.

1.9 证明循序可测过程有适应的可测修正.

1.10 证明如果 $\mu$ 为可料 (可选) 测度，则对任意的有界可测过程 $X$, 有

$$^{o}X = E_\mu(X|\mathcal{O}), {}^{p}X = E_\mu(X|\mathcal{P})$$

1.11 证明当 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续时， $\tau$ 为停时 $\iff (\tau,\infty) \in \mathcal{O}, [\tau] \in \mathcal{O}$. 因而一切以停时为端点的随机区间均为可选集.

1.12 证明若 $\sigma, \tau$ 为停时，则 $\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau$ 为停时，并把它推广到可列个停时的情形.

1.13 设 $\sigma, \tau$ 为停时，证明

1) $\tau$ 关于 $\mathcal{F}_\tau$ 可测;

2) $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$;

3) $\mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$.

1.14 证明若 $\tau,\sigma$ 为停时，则 $\tau+\sigma$ 为停时.

1.15 设 $X=\{X_t,\mathcal{F}_t\},t\in R_+$ 为右连续下鞅 (鞅)， $(\sigma_t),t\in R_+$ 为一族递增的有界停时 (或 $(X_t)$ 一致可积)，则 $\{X_{\sigma_t},\mathcal{F}_{\sigma_t},t\in R_+\}$ 为下鞅 (鞅)，从而对任意的有界停时，停止过程 $\tau,(X_t^\tau)$ 为下鞅 (鞅).

1.16 研究定理 1.52 未完成的证明.

1.17 设 $(M_t,\mathcal{F}_t),t\leqslant T<\infty$ 为连续鞅，证明对正数 $A$, 有

$$E\left((M^*\wedge A)^2\right)\leqslant 2E\left((M^*\wedge A)|M_T|\right)$$

其中 $M^*=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|M_t|$, 提示：利用

$$(M^*\wedge A)^p=\int_0^{M^*\wedge A}px^{p-1}\,\mathrm{d}x, p=1,2.$$

# 第二章 随机积分

## §2.1 引 言

本章我们将定义随机积分 $\int_{[0,t]} X\,\mathrm{d}M$, 其中 $M$ 是右连续局部 $L^2$ 鞅, $X$ 要满足某种可测性与可积性条件. 特别当 $M$ 是右连续 $L^2$ 鞅, 且其轨道局部有界变差, 而 $X$ 连续且适应, 则 $\int_{[0,t]} X\,\mathrm{d}M$ 可定义为 Riemann-Stiltjes 积分, 即

$$\int_{[0,t]} X_s\,\mathrm{d}M_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{[2^n t]} X_{\frac{k}{2^n}}\left(M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}}\right)$$

典型的例子是 $M_t = N_t - \alpha t$, 其中 $(N_t)$ 是强度为 $\alpha$ 的 Pisson 过程, 并且 $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leqslant t)^-$(完备化). 此时

$$\begin{aligned} E(M_t|\mathcal{F}_s) &= E\left(N_t|\mathcal{F}_s\right) - \alpha t \\ &= N_s - \alpha s + E(N_t - N_s|\mathcal{F}_s) - \alpha(t-s) \\ &= N_s - \alpha s + E\left(N_t - N_s\right) - \alpha(t-s) \\ &= N_s - \alpha s \end{aligned}$$

而

$$\int_{[0,t]} X_s(\omega)\,\mathrm{d}M_s(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\tau_k\leqslant t} X_{\tau_k}(\omega) - \alpha\int_0^t X_s(\omega)\,\mathrm{d}s$$

其中 $\tau_k$ 是 $N$ 的第 $k$ 次跳，而右边实际是有限和，因为在 $[0,t]$ 上只有有限次跳.

历史上最早研究的是对所谓 Brownian 运动的随机积分. 早在 1827 年，英国植物学家 Brown 就在显微镜下观察到花粉在静水中的奇怪的不规则运动. 1905 年，Einstein 对这种现象作了物理的解释 .1923 年 ,Wiener 构造了它的数学模型. 我们这里所讨论的 Brownian 运动或 Wiener 过程就是这种模型.

**2.1定义** Brownian **运动** $(B_t,\mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 是一个定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程，它满足以下条件：

(1) 具有独立增量，即对于不相交的区间 $(s,t],(u,v]$, $B_v - B_u$ 与 $B_t - B_s$ 相互独立；

(2)$B_t - B_s \sim N(0,\sigma^2(t-s))$;

(3)$B_t(\omega)$ 的 (几乎一切) 轨道连续.

特别当 $B_0 = 0, \sigma = 1$ 时，则称之为是 **标准** Brownian **运动**. Brownian 运动也称作 Wiener **过程**，一般我们总用 $B$ 或 $W$ 表示它. 一个取值于 $R^d$ 的 $d$ 维随机过程 $B = (B_1(t), B_2(t), \cdots, B_d(t))$，若各分量相互独立，且每个分量都是 Brownian 运动，则称 $B$ 为 $d$ 维 Brownian 运动.

其实，上述定义中 (1),(2) 就可确定一个过程的分布，我们称这样的过程具有 Brown 分布.

为简单起见，我们不妨只讨论标准 Brownian 运动. 若非特别声明，下面所提及的 Brownian 运动均指标准 Brownian 运动. 除了下面给出一个较易验证的等价定义.

**2.2命题** 设 $B_0 = 0, B = (B_t), t \in R_+$ 的轨道连续，则 $B$ 为 Brownian 运动的充要条件是：

(1) 它为 Gauss 过程亦即 $\forall t_1, t_2, \cdots, t_n, (B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ 的联合分布为正态分布,

(2)

$$EB_t = 0,\ E(B_tB_s) = t \wedge s \tag{2-1}$$

**证明** 必要性: 利用特征函数方法不难得知 (1) 成立; 而 $EB_t = E(B_t - B_0) = 0$,

$$\begin{aligned} EB_tB_s &= \frac{1}{2}E\left(B_t^2 + B_s^2 - (B_t - B_s)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(t + s - |t - s|) = t \wedge s \end{aligned}$$

充分性: 当 $B$ 为 Gauss 系, 且 (2 − 1) 式成立, 则

$$\begin{aligned} E(B_t - B_s) &= 0; \\ E(B_t - B_s)^2 &= t + s - 2(t \wedge s) = |t - s|; \end{aligned}$$

$\forall s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2$, 有

$$E((B_{t_1} - B_{s_1})(B_{t_2} - B_{s_2})) = t_1 - s_1 - t_1 + s_1 = 0$$

可见 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$, 而在 Gauss 系中不相关即独立. □

利用 2.2 命题不难证明 Brownian 运动的某些变换仍是 Brownian 运动.

**2.3命题** 设 $B = (B_t)$ 为 Brownian 运动, 则下列过程仍为 Brownian 运动:

(1) $\forall u \geqslant 0, \{B_{t+u} - B_u\}$;

(2) $\forall \lambda > 0, \left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ B_{\lambda t}\right\}$;

(3) $\{Y_t = tB_{\frac{1}{t}}\}$;(令 $Y_0 = 0$);

(4) $\forall T > 0$, $\{B_{T-t} - B_T\}$.

**2.4命题** $(B_t)$ 为标准的 Brownian 运动的充要条件是，关于自然 $\sigma$ 代数族 $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leqslant t)$[1]，$(B_t, \mathcal{F}_t^B)$ 以及 $(B_t^2 - t, \mathcal{F}_t^B)$ 是鞅.

**证明** 必要性：对 $t > s$, 增量 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s^B$ 独立，我们有

$$E\left(B_t | \mathcal{F}_s^B\right) = E\left(B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B\right) + B_s = B_s$$

而且

$$\begin{aligned} E(B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s^B) &= E((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s^B) \\ &= E\left(B_t - B_s\right)^2 = t - s \end{aligned}$$

条件的充分性由 Levy 得到，下面的定理 3.7 证明了

$$E(\exp\left(i\lambda(B_t - B_s)\right) | \mathcal{F}_s^B) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2(t - s)\right\}$$

从而 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s^B$ 独立，且 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, 故 $B$ 为 Brownian 运动. □

上述命题表明对于 Brownian 运动 $B$，$\{\mathrm{e}^{i\lambda B_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathcal{F}_t\}$ 为连续鞅. 我们还可证明 $\left\{\mathrm{e}^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathcal{F}_t^B\right\}$, 也是连续鞅.

对 Brownian 运动的随机积分 $\int_{[0,t]} B_s(\omega)\,\mathrm{d}B_s(\omega)$ 不能看成是 L-S 积分，因为布朗运动 $B$ 在 $[0, t]$ 上不是有界变差的. 我们有下面的命题：

**2.5命题** 设 $(B_t, \mathcal{F}_t), t \geqslant 0$ 为 Brownian 运动，令 $0 = t_0^n <$

---

[1] 这里及今后总假定 $\mathcal{F}_t^B$ 是完备的，也即包含了一切零概集.

$t_1^n < \cdots < t_n^n = t$ 为区间 $[0,t]$ 的分划，记

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left( B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)^2$$

则当 $\delta^n = \max_i |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$ 时,

$$\text{l.i.m } S_n = t \tag{2-2}$$

这里 l.i.m 表示均方极限，并且 a.s. 有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = t \tag{2-3}$$

**证明** 对一切 $n$, 有 $ES_n = t$, 为证 (2−2) 式只需证 $DS_n \to 0$. 而由 Brownian 运动增量的独立性及增量服从正态分布，可得

$$\begin{aligned} DS_n &= \sum_{i=0}^{n-1} D\left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ E(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^4 \\ &\quad -2E(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 (t_{i+1}^n - t_i^n) + (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \Big\} \\ &= 2\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 = 2\delta^n t \to 0 \end{aligned}$$

下面在假设 $t_i^n = \dfrac{it}{n}$ 下，证明 (2−3) 式. 记

$$\xi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - \frac{t}{n} \right\}$$

为证 $\xi_n \to 0$, 只需证 $\forall \epsilon > 0, \sum P(|\xi_n| > \epsilon) < \infty$. 而 $P(|\xi_n| > \epsilon) \leqslant \dfrac{1}{\epsilon^4} E|\xi_n|^4$, 而由 $E|\xi_n|^4 = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, 于是 (2−3) 式得证. □

由此命题，我们可知在任意的 $[0,t]$ 内 Brownian 运动的几乎所有样本不是有限变差的．事实上若在一个正概率集上，样本具有有限变差，则

$$S_n \leqslant \max_j |B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}| \text{Var}_{0\leqslant s\leqslant t} B_s(\omega) \to 0$$

与命题 2.5 矛盾． □

下面讨论可料过程对 $L^2$ 鞅的随机积分，它包含了对 Brownian 运动的随机积分．对于右连续的 $L^2$ 鞅 $M$，我们将定义在 $\mathcal{P}$ 上与 $M$ 相联系的测度 $\mu_{M^2}$，然后定义随机积分，最后给出对 $M$ 与对 $X$ 的推广．

## §2.2 Doleans 测度

下面介绍 Doleans 测度，它是建立随机积分的基础．

设 $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t), t \in R$ 为适应过程，$(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件，$\forall t \in R_+, E|Z_t| < \infty$，在 $\mathcal{R}$ 上定义

$$\lambda_Z((s,t] \times F) = E\, I_F(Z_t - Z_s), F \in \mathcal{F}_s, s < t;$$

$$\lambda_Z(\{0\} \times F_0) = 0, F_0 \in \mathcal{F}_0$$

将它扩张到由 $\mathcal{R}$ 生成的代数 $\mathcal{A}$ 上，成为有限可加集函数 $\lambda_Z$，称为是由 $Z$ 生成的 **容度**．显然，$\lambda_Z = 0$(或 $\geqslant 0$) $\Longleftrightarrow$ $Z$ 为鞅 (或相应地，下鞅)；当 $\lambda_Z$ 为有界变差 $\Longleftrightarrow$ $Z$ 为拟鞅．

若 $\lambda_Z$ 可扩张成为 $\mathcal{P}$ 上测度，则称它为 Doleans 测度．特别，设 $M = (M_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为 $L^2$ 鞅，则当 $M$ 右连续时，容度 $\lambda_{M^2}$ 可扩张为 $\mathcal{A}$ 上 $\sigma$ 可加集函数 ([4]p53,th.6.13) 而由 Caratheodory

测度扩张定理，$\lambda_{M^2}$ 可扩张为 $\mathcal{P}$ 上的测度，记为 $\mu_{M^2}$.[①] 此时，

$$\mu_{M^2}((s,t]\times F) = E\,I_F(M_t - M_s)^2 \qquad (2-4)$$

记

$$\mathcal{L}_M^2 \triangleq L^2(R_+\times\Omega, \mathcal{P}, \mu_{M^2})$$

例：设 $B=(B_t,\mathcal{F}_t)t\in R_+$ 为 Brownian 运动，$E B_0^2<\infty$, 则

$$\lambda_{B^2}((s,t]\times F) = E\left(I_F(B_t-B_s)^2\right) = \lambda\times P((s,t]\times F)$$

$$\lambda_{B^2}(\{0\}\times F_0) = 0$$

因此，$\mu_{B^2}=\lambda\times P$, 这里 $\lambda$ 表示 Lebesgue 测度.

设 $M$ 为右连续 $L^2$ 鞅，当 $t\leqslant T<\infty$ 时，$M=(M_t,\mathcal{F}_t), t\leqslant T$ 类 D, 由 Doob-Meyer 分解定理，$M_t^2 = m_t + <M>_t$ . 其中 $(m_t), t\leqslant T$ 为鞅，而 $<M>_t, t\leqslant T$ 为可积可料增过程．于是由 (2－4) 式，

$$\begin{aligned}\mu_{M^2}((s,t]\times F) &= EI_F(M_t^2 - M_s^2)\\ &= E\,I_F(<M>_t - <M>_s) \qquad (2-5)\end{aligned}$$

## §2.3 可料过程对 $L^2$ 鞅的随机积分

设 $M$ 为右连续 $L^2$ 鞅，定义

$$\int_{[0,\infty)} I_{((s,t]\times F)}\,\mathrm{d}M_u = I_F(M_t - M_s), t>s, F\in\mathcal{F}_s$$

---

① 此时，$\mu_{M^2}(R_+\times\Omega)$ 未必有限，但 $\sigma$ 有限，如果 $M$ 为平方可积鞅 (§2.6)，则 $\mu_{M^2}$ 为有限测度.

$$\int_{[0,\infty)} I_{\{0\}\times F_0}\,\mathrm{d}M_u = 0, F_0 \in \mathcal{F}_0$$

记 $\mathcal{E}$ 为简单函数类，即对 $X \in \mathcal{E}$

$$X = \sum_{j=1}^{n} c_j I_{(s_j,t_j]\times F_j} + c_0 I_{\{0\}\times F_0} \tag{2-6}$$

定义

$$\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M \triangleq \sum_{j=1}^{n} c_j I_{F_j}(M_{t_j} - M_{s_j})$$

它不依赖于 $X$ 的表示.

**2.6定理** $\forall X \in \mathcal{E}$ 我们有 Ito 同构:

$$E\left\{\left(\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M\right)^2\right\} = \int_{R_+\times\Omega} X^2\,d\mu_{M^2} \tag{2-7}$$

**证明**

$$\left(\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j^2 I_{F_j}(M_{t_j} - M_{s_j})^2$$

$$+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j c_k I_{F_j\cap F_k}(M_{t_j} - M_{s_j})(M_{t_k} - M_{s_k})$$

于是，

$$
\begin{aligned}
&E\left(\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j^2 E I_{F_j}(M_{t_j} - M_{s_j})^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \mu_{M^2}\big((s_j,t_j]\times F_j\big) + c_0^2 \mu_{M^2}(\{0\}\times F_0) \\
&= \int_{R_+\times\Omega} X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2}
\end{aligned}
$$

□

**2.7引理** $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{L}_M^2$ 中稠密.

**证明** 因为 $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{A}),\forall\epsilon>0$, 若 $A\in\mathcal{P}$, 且 $\mu_{M^2}(A)<\infty$, 则存在 $B\in\mathcal{A}$, 使得 $\mu_{M^2}(A\Delta B)<\epsilon$. 因此任意的 $\mathcal{P}$ 简单函数可用 $\mathcal{A}$ 简单函数逼近，而 $\mathcal{P}$ 简单函数在 $\mathcal{L}_M^2$ 中稠密 (文献 [3] 引理 4.7)，定理得证. □

利用 $(2-7)$ 式，以及 2.7 引理，我们可以对一切 $X\in\mathcal{L}_M^2$ 定义随机积分 $\int X\mathrm{d}M$.

事实上，$\forall X\in\mathcal{L}_M^2$, 存在 $X_n\in\mathcal{E}$ 使得

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}_M^2} X$$

我们定义

$$\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M = \mathrm{l.i.m}\int_{[0,\infty)} X_n\,\mathrm{d}M \tag{2-8}$$

由 $(2-7)$ 式可知，

上述随机积分的定义并不依赖于逼近序列 $(X_n)$ 的选取. 由于

$$E\left(\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M\right)^2 = \lim_{n\to\infty} E\left(\int_{[0,\infty)} X\,\mathrm{d}M\right)^2$$
$$= \lim \int_{[0,\infty)} X_n^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2} = \int_{[0,\infty)} X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2}$$

这表明 Ito 同构仍然成立. 由此可知, Ito 同构 $X \to \int X\mathrm{d}M$ 是从 Hilbert 空间 $\mathcal{L}_M^2$ 与 $L^2(P)$ 之间的线性同构.

**注:** 注意到 (2 − 5) 式, (2 − 7) 式中,

$$\int_{R_+\times\Omega} X^2\,\mathrm{d}\mu_M^2 = E\int_{R_+} X_s^2\,\mathrm{d} < M >_s$$

类似于引理 2.7, 文献 [2] 之引理 5.4(5.5) 证明了如果 $< M >_t$a.s. 连续 (相应地, a.s. 绝对连续), 则 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{L}_M^2(\mathfrak{D})$(相应地, $\mathcal{L}_M^2(\mathcal{S})$) 中稠密, 这样便可对满足

$$\int_{R_+\times\Omega} X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2}$$

的循序过程或可测的适应过程 $X$ 对平方可积鞅 $M$ 的随机积分.

如果将上述的过程 $X$ 限于 $[0,t]$, 便可得到随机的不定积分. 为此, 记 $\Lambda^2(\mathcal{W},M) = \{X\in\mathcal{W} : \forall t\in R_+, \int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}\mu_{M^2} < \infty\}$. 其中 $\mathcal{W}$ 表示某过程类, 如 $\mathcal{P}$ 为可料过程类, $\mathcal{S}$ 为可测适应过程类. 则对任意的 $X\in\Lambda^2(\mathcal{P},M)$, 随机积分 $\int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M$ 有定义, 且

$$E\left(\int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M\right)^2 = \int_{[0,t]\times\Omega} X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2} \qquad (2-9)$$

由于 $\mu_{M^2}(\{0\}\times\Omega)=0$, 由 (2－9) 式可见,

$$\int I_{\{0\}\times\Omega}X\,\mathrm{d}M=0 \tag{2-10}$$

**注意**: (2–8) 式所定义的随机积分是一个随机变量, 而 $\int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M, t\in R_+$ 将是一个随机过程.

设 $X\in\mathcal{E}$, 由 (2－6) 式所定义, 则 $\forall t\in R_+, I_{[0,t]}X\in\mathcal{E}$, 且

$$\int_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M=\sum_{j=1}^{n}c_jI_{F_j}(M_{t\wedge t_j}-M_{t\wedge s_j}) \tag{2-11}$$

易证上式右端为右连续 $L^2$ 鞅.

**2.8定理** 设 $X\in\Lambda^2(\mathcal{P},M),\forall t$, 令 $Y_t=\int_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M$, 则 $Y=(Y_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 是零均值的 $L^2$ 鞅, 且有轨道右连续的修正.

**证明** $\forall n\in N, I_{[0,n]}X\in\mathcal{L}_M^2$, 于是存在 $(X^k,k\in N)\subseteq\mathcal{E}$, 使得 $X^k\xrightarrow{\mathcal{L}_M^2}I_{[0,n]}X$. 于是

$$Y_t^k\triangleq\int_{[0,t]}X^k\mathrm{d}M\xrightarrow{L^2}Y_t=\int_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M. \tag{2-12}$$

对于任意的 $k$,

$$Y^k=(Y_t^k,\mathcal{F}_t),t\in R_+$$

是右连续 $L^2$ 鞅, 而 $L^2$ 极限保持鞅性质, 故 $(Y_t,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 是 $L^2$ 鞅, 而由 $Y_0=0$, 因此 $\forall t, EY_t=EY_0=0$. 现在我们只需证明存在 $Y$ 的一个轨道右连续过程修正. 由鞅的极大不等式,

$$P\left(\sup\nolimits_{0\leqslant t\leqslant n}|Y_t^k-Y_t^j|\geqslant\frac{1}{2^m}\right)\leqslant 2^{2m}E\,|Y_n^k-Y_n^j|^2 \tag{2-13}$$

由 $(2-13)$ 式，存在子列使得

$$E\left(|Y_n^{k_{m+1}}-Y_n^{k_m}|\right)^2 \leqslant \frac{1}{2^{3m}}$$

于是

$$\sum_m P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant n}|Y_t^{k_{m+1}}-Y_t^{k_m}|\geqslant \frac{1}{2^m}\right)\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}<\infty$$

由 Borel-Cantelli 引理，

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant n}|Y_t^{k_{m+1}}-Y_t^{k_m}|\geqslant \frac{1}{2^m},\text{i.o.}\right)=0$$

因此，存在 $\Omega_n, P(\Omega_n)=1, \forall\omega\in\Omega_n, \left(Y^{k_m}(t,\omega), m\in N\right)$ 一致收敛于某个 $Z^n(t,\omega), t\in[0,n]$. 因为 $Y^{k_m}(\cdot,\omega)$ 在 $[0,n]$ 上右连续，故 $Z^n(\cdot,\omega)$ 亦然. 而 $Y^{k_m}\xrightarrow{\text{a.s}} Z_t^n$，又 $Y^{k_m}\xrightarrow{L^2} Y_t$，故 $Z_t^n=Y_t$, a.s. 于是 $\{Z_t^n, t\in[0,n]\}$ 是 $\{Y_t, t\in[0,n]\}$ 的右连续修正. 对 $n_1<n_2, Z_t^{n_1}, t\in[0,n_1]$ 与 $Z_t^{n_2}, t\in[0,n_2]$ 均是 $Y_t, t\in[0,n_1]$ 在 $\Omega_{n_1}\cap\Omega_{n_2}$ 上的右连续修正，两者无区别. 因此存在 $\Omega_0=\cap_n\Omega_n, P(\Omega_0)=1$，使在 $\Omega_0$ 上， $Z(t,\omega)=\lim_n Z^n(t,\omega)$ 存在，且 $\forall t\leqslant n, Z(t,\omega)=Z^n(t,\omega)$. $Z$ 在 $\Omega_0$ 上右连续. 只要在 $\Omega_0^c$ 上定义 $Z=0$，则 $L^2$ 鞅 $Z$ 便是 $Y$ 的轨道右连续的修正. □

上式证明完全适用于下面推论的证明.

**2.9推论** 在定理 2.8 的条件下，如果 $M$ 是连续的过程，例如取 $M$ 为 Brownian 运动，则随机积分 $\int X\mathrm{d}M$ 存在连续的修正.

今后记

$$\int_{[0,t]} X\,\mathrm{d}M \triangleq \int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M$$

当 $M$ 为连续过程时，例如 $M=B$，则记它为 $\int_0^t X\mathrm{d}M$.

下面给出随机积分 $\displaystyle\int_{[0,t]} X\,\mathrm{d}M$ 的性质.

**2.10定理** 设 $X\in\Lambda^2(\mathcal{P},M), Y_t=\int_{[0,t]}X\,\mathrm{d}M$，则

(1) $\forall s<t, Z\in b\mathcal{F}_s$(有界的 $\mathcal{F}_s$ 可测变量)，有

$$\int_{(s,t]} ZX\,\mathrm{d}M = Z\int_{(s,t]} X\,\mathrm{d}M \tag{2-14}$$

(2) $\forall A\in\mathcal{P}$,

$$\mu_{Y^2}(A)=\int_A X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2} \tag{2-15}$$

(3) 对任何有界停时 $\tau$,

$$Y_\tau \triangleq \int_{[0,\tau]} X\,\mathrm{d}M = \int I_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M \tag{2-16}$$

**证明**

1) 如果 $Z=I_G, G\in\mathcal{F}_s$ 以及 $X=I_{(u,v]\times F}, F\in\mathcal{F}_u$，则

$$\begin{aligned}\int_{(s,t]} ZX\mathrm{d}M &= \int I_{(s,t]\times G}I_{(u,v]\times F}\mathrm{d}M\\ &= \int_{(s\vee u,t\wedge v]\times F\cap G}\mathrm{d}M\\ &= I_{F\cap G}\,(M_{t\wedge v}-M_{s\vee u})\\ &= I_G\int_{(s,t]}X\,\mathrm{d}M = Z\int_{(s,t]}X\,\mathrm{d}M\end{aligned}$$

由线性同构，上式对一切 $Z$ 为 $\mathcal{F}_s$ 简单函数以及 $X\in\mathcal{E}$ 成立. 对于一般的 $Z$ 及 $X$，存在有界的 $\mathcal{F}_s$ 简单函数 $Z^k\to Z$ 以及 $X^k\in\mathcal{E}$,

使得

$$I_{(s,t]}X^k \xrightarrow{\mathcal{L}^2_M} I_{(s,t]}X$$

由 $Z^k$ 的有界性，故

$$I_{(s,t]}Z^kX^k \xrightarrow{\mathcal{L}^2_M} I_{(s,t]}ZX$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{(s,t]} ZX\,\mathrm{d}M - Z\int_{(s,t]} X\,\mathrm{d}M \\
=&\int_{(s,t]}(ZX - Z^kX^k)\,\mathrm{d}M \\
&+\left\{\int_{(s,t]} Z^kX^k\,\mathrm{d}M - Z^k\int_{(s,t]} X^k\,\mathrm{d}M\right\} \\
&+Z^k\int_{(s,t]}(X^k - X)\,\mathrm{d}M + (Z^k - Z)\int_{(s,t]} X\,\mathrm{d}M
\end{aligned}$$

将上式两端取绝对值，再取期望，则因为括号 $\{\cdots\}$ 中 $Z^k, X^k$ 均为简单函数而为 0, 第一、第三项由 Ito 同构而趋于 0, 最后一项则由 Schwarz 不等式及有界收敛定理而 $L^1$ 趋于 0.

2) 对于 $A = \{0\} \times F_0, F_0 \in \mathcal{F}_0, (2-15)$ 式两边均为 0; 当 $A = (s,t] \times F, F \in \mathcal{F}_s$, 则

$$\begin{aligned}
\mu_Y(A) &= EI_F(Y_t - Y_s)^2 = E\left(I_F\int_{(s,t]} X\,\mathrm{d}M\right)^2 \\
&= \int I_{(s,t]\times F}X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2} = \int_A X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2}
\end{aligned}$$

上式两端均为 $\mathcal{P}$ 上的 $\sigma$ 有限测度，它们在 $\mathcal{R}$ 上相等，因而由测度扩张定理，它们在 $\mathcal{P}$ 上相等.

3) 由于 $\tau$ 为取值于 $[0,\infty]$ 的随机变量，所以 (2 – 16) 式不是自明的．设 $\tau$ 为有界停时， $\tau \leqslant C$(常数)，取

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{N_n} I_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(\tau)\frac{k+1}{2^n}$$

式中 $N_n = [2^n C]$. 则 $\tau_n \downarrow \tau$, 并且 $\tau_n$ 只取有限个值，

$$[0,\tau_n] = (\{0\}\times\Omega) \cup \bigcup_{k=0}^{N_n}(k2^{-n},(k+1)2^{-n}] \times\{\tau \geqslant k2^{-n}\} \in \mathcal{A} \qquad (2-17)$$

由 $\tau_n$ 的有界性， $I_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_M^2, \forall n$,

$$\begin{aligned} Y_{\tau_n} &= \sum_{k=0}^{N_n} I_{\{k2^{-n}\leqslant\tau<(k+1)2^{-n}\}} Y_{(k+1)2^{-n}} \\ &= \sum_{k=0}^{N_n} I_{\{\tau\geqslant k2^{-n}\}}\left(Y_{(k+1)2^{-n}} - Y_{k2^{-n}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N_n} I_{\{\tau\geqslant k2^{-n}\}}\int_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} X\,\mathrm{d}M \\ &= \sum_{k=0}^{N_n}\int I_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]\times\{\tau\geqslant k2^{-n}\}}X\,\mathrm{d}M, \quad Y_0 = 0 \end{aligned}$$

由线性性， (2 – 10) 式及 (2 – 17) 式，

$$Y_{\tau_n} = \int I_{[0,\tau_n]}X\,\mathrm{d}M \qquad (2-18)$$

因为 $\tau_n \downarrow \tau, Y$ 右连续， (2 – 18) 式的左边趋于 $Y_\tau$, 而由 $\tau \leqslant C$ 以及 Ito 同构，右边趋于 $\int I_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M$.(2 – 16) 式得证． □

**2.11推论** ,设 $s<t, F\in\mathcal{F}_s, \tau\in\mathcal{J}$, 则有

$$\int I_{[0,\tau]}I_{((s,t]\times F)}\,\mathrm{d}M=I_F(M_{t\wedge\tau}-M_{s\wedge\tau}) \tag{2-19}$$

**证明** 记 $X=I_{[0,\tau]}I_{(s,t]\times F}$, 则

$$\int_{[0,u]}X\,\mathrm{d}M=I_F(M_{t\wedge u}-M_{s\wedge u})$$

上式右端关于 $u$ 右连续，因此可以看成是 $\int_{[0,u]}X\mathrm{d}M$ 的右连续修正，用 $\tau\wedge t$ 代替 $u$, 则得

$$\int_{[0,\tau\wedge t]}X\,\mathrm{d}M=I_F(M_{t\wedge\tau}-M_{s\wedge\tau})$$

在 $(2-16)$ 式中 $\tau$ 改为 $\tau\wedge t$, 则上式左边 a.s. 等于 $(2-19)$ 式的左端，$(2-19)$ 式得证. □

上面关于 $\mu_{M^2}$ 及随机积分 $\int X\mathrm{d}M$ 的定义中，显然用 $M-M_0$ 代替 $M$ 将不会改变什么，因此对于 $L^2$ 鞅随机积分的定义中不妨认为 $M_0=0$.

## §2.4 可料过程对局部 $L^2$ 鞅的随机积分

现在讨论对局部 $L^2$ 鞅的随机积分，为此先引入如下定义：

**2.12定义** 对 $p\geqslant 1$, 称 $M=(M_t,\mathcal{F}_t), t\in R_+$ 为局部 $L^p$ 鞅，亦即存在停时列 $\{\tau_k\}, \tau_k\uparrow\infty$, 使得 $\forall k\in N, M^k\triangleq M_{t\wedge\tau_k}-M_0$ 为右连续 $L^p$ 鞅，并称 $\{\tau_k\}$ 为局部化停时列.

事实上，我们还可要求 $M^k$ 为一致可积鞅. 这是因为，如果取停时列 $\sigma_k=\tau_k\wedge k$, 则 $M_{t\wedge\sigma_k}-M_0$ 就是一致可积鞅. 显然，一个 $L^p$ 鞅 $(p\geqslant 1)$ 是局部 $L^p$ 鞅，反之我们有如下引理：

**2.13引理** 设 $p \geqslant 1, M$ 是局部 $L^p$ 鞅，其局部化序列为 $\{\tau_k\}$，如果对任意的 $t \geqslant 0$, 我们有

$$\{|M_{t\wedge\tau_k}|^p, k \in N\} \text{ 一致可积} \tag{2-20}$$

则 $M$ 为 $L^p$ 鞅；当 $M$ 为右连续 $L^p$ 鞅，则 (2 − 20) 式成立.

**证明** 设 (2 − 20) 式成立，则 $(M_0, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为 $L^p$ 鞅，故 $(M_{t\wedge\tau_k}, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 也是 $L^p$ 鞅. 由 $\lim\limits_{k\to\infty} M_{t\wedge\tau_k} = M_t$,a.s., 又由 (2 − 20) 式所给出的一致可积性，我们有 $M_{t\wedge\tau_k} \xrightarrow{L^p} M_t$. 对 $t \geqslant s, E(M_{t\wedge\tau_k}|\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge\tau_k}$，令 $k \to \infty$, 便知 $(M_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为 $L^p$ 鞅.

如果 $M$ 是右连续 $L^p$ 鞅，则由 Doob 停止定理对固定的 $t \in R_+$, $|M_{t\wedge\tau_k}|^p \leqslant E(|M_t|^p|\mathcal{F}_{\tau_k})$, 可见 (2 − 20) 式成立. □

**2.14命题** 设 $M$ 为连续局部鞅，则对任意的 $p \geqslant 1, M$ 为局部 $L^p$ 鞅.

**证明** 设 $M$ 为连续局部鞅，局部化序列为 $\sigma_n$，于是 $\forall n$,

$$\{M_{t\wedge\sigma_n} - M_0, t \in R_+\}$$

为连续鞅. 令

$$\tau_k = \inf\{t \geqslant 0 : |M_t - M_0| \geqslant k\}$$

则 $\{\tau_k\}$ 为停时列，且 $\tau_k \uparrow \infty$, 作为停止过程 $M_{t\wedge\sigma_n\wedge\tau_k} - M_0$ 仍是连续鞅. 我们有

$$\sup_n |M_{t\wedge\sigma_n\wedge\tau_k} - M_0| \leqslant k$$

事实上，当 $t \wedge \sigma_n \wedge \tau_k < \tau_k$ 时，由 $\tau_k$ 的定义而显然成立；当 $t \wedge \sigma_n \wedge \tau_k = \tau_k$ 时，由 $M$ 之右连续， $|M_{\tau_k} - M_0| \geqslant k$, 而由

$M$ 左连续可得：$|M_{\tau_k}-M_0|\leqslant k$, 于是 $|M_{\tau_k}-M_0|=k$. 从而 $\{M_{t\wedge\sigma_n}-M_0,t\in R_+\}$ 为连续有界鞅，更为连续 $L^p$ 鞅. □

记 $\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{W})$ 为 $\mathcal{W}$ 的子类，对于 $X\in\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{W})$, 存在 $M$ 的局部化停时列 $\{\tau_k\}$, 使得 $\forall k\in N, M^k\triangleq M_{t\wedge\tau_k}-M_0$ 为 $L^2$ 鞅，且

$$I_{[0,\tau_k]}X\in\Lambda^2(\mathcal{W},M^k)$$

我们称这里的 $\{\tau_k\}$ 为 $M$ 与 $X$ 的 **局部化序列**. 常用的是 $\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{P})$ 及 $\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{S})$. 今后记 $\mu^k\triangleq\mu^{\tau_k}$ 为由右连续 $L^2$ 鞅 $M^k$ 生成的 Doleans 测度.

例如，$M$ 为连续局部鞅，$X$ 为连续适应过程，令

$$\tau_k=\inf\{t>0:|M_t-M_0|\vee|X_t|>k\}$$

显然 $X\in\mathcal{P},\forall t,k$, 由 $M^k$ 的定义,

$$\int_{R_+\times\Omega}I_{[0,t\wedge\tau_k]}X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^k}=\int_{R_+\times\Omega}I_{(0,t\wedge\tau_k]}X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^k}$$

而在 $(0,t\wedge\tau_k]$ 上，$X^2\leqslant k^2$, 所以,

$$\int_{R_+\times\Omega}I_{[0,t\wedge\tau_k]}X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^k}\leqslant k^4$$

这表明 $X\in\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{P})$.

设 $M$ 为局部 $L^2$ 鞅，$X\in\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{P}),\{\tau_k\}$ 是 $X$ 与 $M$ 的局部化序列，则

$$Y^k=\left\{\int_{[0,t]}I_{[0,\tau_k]}X\,\mathrm{d}M^k,t\in R_+\right\}$$

为右连续 $L^2$ 鞅，我们将定义:

$$Y \triangleq \int_{[0,t]} X \, \mathrm{d}M = \lim Y^k,$$

$$Y^k = \int_{[0,t]} I_{[0,\tau_k]} X \, \mathrm{d}M^k \tag{2-21}$$

为此需要证明上述极限的存在，且此定义与局部化序列 $\{\tau_k\}$ 的选取无关. 下面的引理保证了上述定义的正确性.

**2.15引理** 设 $\tau, \eta \in \mathcal{J}$, 且 $M^\tau = \{M_{t\wedge\tau} - M_0 : t \in R_+\}$ 及 $M^\eta = \{M_{t\wedge\eta} - M_0 : t \in R_+\}$ 为右连续 $L^2$ 鞅， $\mu^\tau, \mu^\eta$ 分别表示由 $M^\tau, M^\eta$ 在 $\mathcal{P}$ 上生成的 Doleans 测度，则在 $[0, \tau\wedge\eta]$ 上，两个测度有相同的值，即

$$\forall A \in \mathcal{P}, \mu^\tau(A \cap [0, \tau\wedge\eta]) = \mu^\eta(A \cap [0, \tau\wedge\eta]) \tag{2-22}$$

**证明** 只要证明对 $A \in \mathcal{R}$, $(2-22)$ 式成立. 当 $A = \{0\} \times F_0, F_0 \in \mathcal{F}_0$ 时，两者均为 0; 当 $A = (s,t] \times F, F \in \mathcal{F}_s$ 时，由推论 2.11 知,

$$\begin{aligned} \mu^\tau(A \cap [0, \tau\wedge\eta]) &= E\left(\int I_{[0,\tau\wedge\eta]} I_{(s,t]\times F} \, \mathrm{d}M^\tau\right)^2 \\ &= E\{I_F(M_{t\wedge\tau\wedge\eta} - M_{s\wedge\tau\wedge\eta})^2\} \end{aligned}$$

对于 $\mu^\eta$ 也有同样的结果，因此 $(2-22)$ 式得证. □

**2.16引理** 在引理 2.15 的假设下，如设 $I_{[0,\tau]}X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M^\tau)$, $I_{[0,\eta]}X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M^\eta), Y^\tau, Y^\eta$ 分别表示它们在 $[0,t]$ 上关于 $M^\tau, M^\eta$ 的随机积分，则

$$P(Y_t^\tau = Y_t^\eta, \forall t \in [0, \tau\wedge\eta]) = 1 \tag{2-23}$$

**证明** 由右连续性，只要证 $\forall t$,

$$Y^{\tau}_{t\wedge\tau\wedge\eta} = Y^{\eta}_{t\wedge\tau\wedge\eta}\text{a.s.}$$

易证当 $X$ 为可料矩形的示性函数时，(2 − 23) 式成立，由线性同构，对 $X \in \mathcal{E}$ 成立. 对于一般情形，由于 $I_{[0,t\wedge\tau\wedge\eta]}X \in \mathcal{L}^2(\mu^{\tau})$，因此存在 $X^n \in \mathcal{E}$，使得 $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}^2(\mu^{\tau})} X$，所以 $I_{[0,t\wedge\tau\wedge\eta]}(X^n - X) \xrightarrow{\mathcal{L}^2(\mu^{\tau})} 0$. 此事对 $\mu^{\eta}$ 同样成立 (因为两者在 $[0,t\wedge\tau\wedge\eta]$ 有同样的测度)，所以 (2 − 23) 式成立. □

现在来说明定义 (2 − 21) 式的正确性. 由引理 2.16,

$$Y^m_t(\omega) = Y^k_t(\omega), \forall t \in [0,\tau_k], m \geqslant k$$

于是存在概率为 1 的集合 $\Omega_0$，使得 $\forall \omega \in \Omega_0, \forall t \lim\limits_{m\to\infty} Y^m(t,\omega)$ 存在且有限，且 $\forall k$ 及 $t \in [0,\tau_k]$，这个极限 $Y(t,\omega) = Y^k(t,\omega)$. 它在 $\Omega_0$ 上右连续，只要在 $\Omega_0^c$ 定义 $Y = 0$，则 $Y$ 在 $\Omega$ 上右连续，对于每个 $k, Y_{t\wedge\tau_k} = Y^k_t$, a.s., $\forall t$，因此 $Y$ 是右连续局部 $L^2$ 鞅，局部化序列就是 $\{\tau_k\}$.

我们将写 $Y_t = \int_{[0,t]} X\,\mathrm{d}M, Y_t - Y_s = \int_{(s,t]} X\mathrm{d}M$. 特别当 $M$ 连续时，写为 $\int_0^t X\,\mathrm{d}M$ 或 $\int_s^t X\mathrm{d}M$. 而且由引理 2.16,$Y$ 的定义不依赖于局部化序列的选取.

注意到连续局部鞅是局部 $L^2$ 鞅 (2.14 命题)，因此有

**2.17定理** 设 $M$ 为连续局部鞅，$X$ 为连续适应过程，则 $X \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_M(\mathcal{P})$，且 $\int_0^t X\,\mathrm{d}M$ 为连续局部鞅.

## §2.5 对适应过程的随机积分

现在试图将被积过程推广到适应过程类.

设 $M$ 为右连续 $L^2$ 鞅，假定在可料 $\sigma$ 代数 $\mathcal{P}$ 上， $\mu_{M^2} \ll \lambda \times P$[⊖]. 于是由 Radon-Nikodym 定理，存在 $f \in \mathcal{P}, 0 \leqslant f < \infty$, 使得 $\forall A \in \mathcal{P}$, 有

$$\mu_{M^2}(A) = \int_A f \, d(\lambda \times P)$$

右端对每个 $A \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 都有定义，因此我们得到 $\mu_{M^2}$ 的增补 $\overline{\mu_{M^2}}$. 记 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 中 $\overline{\mu_{M^2}}$ 零测集全体，则

$$\overline{\mathcal{P}} \triangleq \sigma(\mathcal{P} \cup \mathcal{N})$$

为 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 的子 $\sigma$ 代数，从一般测度论可知

**2.18引理**

(1) $\overline{\mathcal{P}} = \{A \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F} : A \Delta A_1 \in \mathcal{N}, A_1 \in \mathcal{P}\}$;

(2) 设 $Z$ 为 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$, 可测，则 $Z \in \overline{\mathcal{P}} \iff \exists X \in \mathcal{P}$, 使得

$$\overline{\mu_{M^2}}(X \neq Z) = 0 \tag{2-24}$$

**2.19定理** 任何 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 可测的适应过程都是 $\overline{\mathcal{P}}$ 可测过程.

**证明** 首先证明 $\mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$. 因为 $\mathcal{O} = \sigma([\tau, \infty) : \tau \in \mathcal{J})$, 而 $(\tau, \infty) \in \mathcal{P}$, 为证明 $\mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, 只要证 $[\tau] \in \overline{\mathcal{P}}$. 因为 $\forall \omega, \lambda\{t : \tau(\omega) =$

---

⊖ 本节均假设这个条件成立.

$t\} = 0$, 由 Fubini 定理， $\lambda \times P([\tau]) = 0$, 所以 $\mu_{M^2}([\tau]) = 0$. 因此 $[\tau] \in \mathcal{N} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$.

我们知道一个有界的 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$ 可测过程 $Z$, 存在可选过程 $Y$, 使得

$$Y_t = E(Z_t|\mathcal{F}_t) \qquad (2-25)$$

对有界的 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$，可测的适应过程 $Z$, 存在可选过程 $Y$ 满足 $(2-25)$ 式. 既然 $Z$ 适应，故 $Y_t = Z_t$,a.s.. 于是 $\lambda \times P(Y \neq Z) = 0$. 由 (2-25) 式， $\overline{\mu_{M^2}}(Y \neq Z) = 0, Y$ 可选，因而属于 $\overline{\mathcal{P}}$, 而由引理 2.18, 存在 $X \in \mathcal{P}$, 使得 $\overline{\mu_{M^2}}(X \neq Y) = 0$. 从而 $\overline{\mu_{M^2}}(X \neq Z) = 0$, 于是由引理 2.18 1)$Z \in \overline{\mathcal{P}}$. 对于一般 (不要求有界) 的适应过程 $Z$，只要考虑到 $Z = \lim\limits_{n\to\infty} Z \wedge n$ 即可. □

由于 $\mathcal{P} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, 则 $\mathcal{L}^2(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{P}})$. 反之，对任意的 $Z \in \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{P}})$, 由引理 2.18 2) 存在 $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P})$, 使得 $X = Z, \overline{\mu_{M^2}}$−a.s.. 而在 Hilbert 空间 $\mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{P}})$ 中两个 $\overline{\mu_{M^2}}$−a.s. 相等的过程视为同一，因此有 $\mathcal{L}^2(\mathcal{P}) = \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{P}})$. 这样，对 $Z \in \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{P}})$ 可定义随机积分 $\int Z\,\mathrm{d}M$. 而对于 $Z \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_M(\overline{\mathcal{P}})$, 我们有 $X \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_M(\mathcal{P})$, 使得 $\mu_{M^2}(X \neq Z) = 0$, 所以对一切 $t$,a.s. 有

$$\int_{[0,t]} Z\,\mathrm{d}M = \int_{[0,t]} X\,\mathrm{d}M$$

下面给出 $Z \in \Lambda(\overline{\mathcal{P}}, B)$ 的条件，记

$$\Lambda^2_w(S, B) = \left\{X \in S : \forall t, \int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty\right\} \qquad (2-26)$$

**2.20定理** 设 $Z \in \Lambda^2_w(S, B)$ 则 $Z \in \Lambda(\overline{\mathcal{P}}, B)$.

**证明** 由定理 2.19 及引理 2.18, 存在 $X \in \mathcal{P}$, 使得 $X = Z, \lambda \times P$—a.s.. 由 Fubini 定理, $\forall \omega, X(t,\omega) = Z(t,\omega), \lambda$—a.s. 由 $(2-26)$ 式, 则对一切 $t, \int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s < \infty$. 从而 $\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s$ 关于 $t$ 连续, 而由于 $X \in \mathcal{P} \subseteq \mathfrak{D}$, 由 Fubini 定理可知 $\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s \in \mathcal{F}_t$. 定义

$$\tau_k = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s \geqslant k\right\}$$

则停时列 $\tau_k \uparrow \infty$,a.s..$\forall t, k$ 有

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} Z_s^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{t\wedge\tau_k} X_s^2\,\mathrm{d}s \leqslant k$$

取期望则知 $\forall t, k$

$$I_{[0,t\wedge\tau_k]}Z \in L^2(R_+ \times \Omega, \overline{\mathcal{P}}, \lambda \times P)$$

因此 $Z \in \Lambda(\overline{\mathcal{P}}, B)$. □

上述表明, 可测的适应过程 $Z \in \Lambda(\overline{\mathcal{P}}, B)$, 它是增广的可料过程, 在 $\mu_B = \lambda \times P$ 的测度下与一个可料过程 $X$ 无区别, 因而 $\int Z\,\mathrm{d}B = \int X\,\mathrm{d}B$. 这就为适应的可测过程定义了对 Brownian 运动的随机积分.

今后在鞅表示定理中, 我们将证明一个关于由 Brownian 运动产生的 $\sigma$ 代数 $\sigma(B_s, s \leqslant t)$ 适应可测的 $L^2$ 鞅 $X_t$, 存在一个可测适应的过程 $f(t,\omega)$, 满足 $P\left(\int_0^t f^2(s,\omega)\right)\mathrm{d}s < \infty$, 使得

$$X_t = E\,X_0 + \int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s \qquad (2-27)$$

由定理 2.20, 我们可找到可料的过程 $\tilde{f}(t,\omega)$, 使得用 $\tilde{f}$ 代替 $f$ 的 $(2-27)$ 式成立，这就是所谓的 Brownian **运动的可料表示性**.

**2.21定理** 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备， $Z$ 是适应的可测过程，而且 $\forall t \in R_+$, $\int_0^t |Z(s,\omega)|\,\mathrm{d}s < \infty$,a.s., 则 $\forall t \in R_+$, $\int_0^t Z(s,\omega)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{F}_t$.

**证明** 如同定理 2.20 的证明，存在 $X \in \mathcal{P}$, 使得 $X = Z, \lambda \times P$–a.s.. 因为 $X \in \mathcal{P} \subseteq \mathfrak{D}$(循序可测 $\sigma$ 代数)，因此 $\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s \in \mathcal{F}_t$，而 $\mathcal{F}_t$ 完备，故 $\int_0^t Z(s,\omega)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{F}_t$. □

## §2.6 平方可积鞅与投影算子

记 $\mathfrak{M}^2$ 为右连续平方可积鞅 (即 $L^2$ 有界鞅)$(M_t,\mathcal{F}_t), t \in R_+$ 全体，亦即满足 $\sup_t EM_t^2 < \infty$. 此时

$$M_\infty \triangleq \lim_{t\to\infty} M_t \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$$

在平方可积鞅空间定义内积

$$(M,N) = E\,M_\infty N_\infty \tag{2-28}$$

设 $M,N \in \mathfrak{M}^2$, 如果 $EM_\infty N_\infty = 0$, 则称它们正交，并记为 $M \perp N$.

**2.22定理** $(\mathfrak{M}^2,(\cdot,\cdot))$ 为 Hilbert 空间.

**证明** $\forall M \in \mathfrak{M}^2$, 令 $\psi(M) = M_\infty$, 则

$$\psi : \mathfrak{M}^2 \to L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$$

反之，对任意的 $\xi \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$, 令 $M$ 为鞅 $E(\xi|\mathcal{F}_t)$ 的右连续修正，则由 Jensen 不等式

$$\sup_t E\,M_t^2 \leqslant E\,\xi^2 < \infty$$

从而 $M \in \mathfrak{M}^2$, 即 $\psi$ 为满射，而且

$$M_\infty = \lim_{t \to \infty} M_t = E(\xi | \mathcal{F}_\infty) = \xi.$$

往证 $\psi$ 为单射：设另有 $N \in \mathfrak{M}^2$, 使得 $\psi(N) \triangleq N_\infty = \xi$,a.s., 则 $N_\infty = M_\infty$a.s.. 从而 $N_t = E(N_\infty | \mathcal{F}_t) = E(M_\infty | \mathcal{F}_t) = M_t$a.s.. 由于它们右连续，故 $M, N$ 无区别. 这样 $\mathfrak{M}^2$ 与 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 同构，且 (2 − 28) 式表明

$$(M, N)_{\mathfrak{M}^2} = (\psi(M), \psi(N))_{L^2}$$

□

今后记 $\mathfrak{M}_0^2$ 为零初值平方可积鞅空间， $\mathfrak{M}_c^2 \subseteq \mathfrak{M}_0^2$ 为零初值平方可积连续鞅空间.

**2.23定理** $\mathfrak{M}_c^2$ 是 $\mathfrak{M}_0^2$ 的闭子空间.

**证明** 设序列 $(X^n) \subseteq \mathfrak{M}_c^2$, 且收敛到 $X \in \mathfrak{M}_0^2$, 即

$$\lim_{n \to \infty} \|X^n - X\|_{\mathfrak{M}_0^2} = \lim_{n \to \infty} \|X_\infty^n - X_\infty\|_{L^2} = 0$$

我们可选择子列 $(X^{n_k})$, 使得 $\|X_\infty^{n_k} - X_\infty\| \leqslant 2^{-k}$. 于是

$$\begin{aligned} E\left(\sum_k \sup_t |X_t^{n_k} - X_t|\right) &= \sum_k E\left(\sup_t |X_t^{n_k} - X_t|\right) \\ &\leqslant 2 \sum_k \left(E |X_\infty^{n_k} - X_\infty|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_k 2 \cdot \frac{1}{2^k} < \infty \end{aligned}$$

因此， $\sum_k \sup_t |X_t^{n_k} - X_t| < \infty$,a.s.. 于是 a.s. 地有

$$X_t^{n_k} \xrightarrow{\text{一致}} X_t,$$

作为连续函数的一致极限 $X \in \mathfrak{M}_c^2$, 所以 $\mathfrak{M}_c^2$ 为闭子空间. □

将 $\mathfrak{M}_0^2$ 作正交分解, 我们得到

$$\mathfrak{M}_0^2 = \mathfrak{M}_c^2 \oplus (\mathfrak{M}_c^2)^{\perp}$$

我们称后者 ($\mathfrak{M}_c^2$ 的正交补空间) 为纯断平方可积鞅空间. 对于平方可积鞅 $M, N, M+N$ 也是平方可积鞅, 记 $\mu_{M^2}, \mu_{N^2}, \mu_{M+N}$ 为相应的 Doleans 测度, 令

$$\mu_{MN} = \frac{1}{2}\left(\mu_{(M+N)^2} - \mu_{M^2} - \mu_{N^2}\right)$$

称它是 Doleans 符号测度, 它关于 $M, N$ 是对称的双线性泛函. 下面的引理所给出的不等式称为 Kunita-Watanable 不等式.

**2.24引理** 设 $M, N \in \mathfrak{M}_0^2$, 则 $\forall A \in \mathcal{P}$, 有

$$|\mu_{MN}(A)| \leqslant (\mu_{M^2}(A))^{\frac{1}{2}} (\mu_{N^2}(A))^{\frac{1}{2}} \qquad (2-29)$$

若 $X, Y \in \mathcal{P}$, 则

$$\int_A |XY|\,|\mathrm{d}\mu_{MN}| \leqslant \left(\int_A X^2 \mu_{M^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A Y^2 \mu_{N^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2-30)$$

这里 $\int_{\bullet} |\mathrm{d}\mu_{MN}|$ 表示 $\mu_{MN}$ 的全变差.

**证明** $\forall t$,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mu_{(M+tN)^2}(A) \\ &= \mu_{M^2}(A) + 2t\mu_{MN}(A) + t^2 \mu_{N^2}(A) \end{aligned} \qquad (2-31)$$

因此, 关于 $t$ 的判别式 $\leqslant 0$, 从而证得 (2-29) 式. 令

$$\lambda(\bullet) \triangleq \int_{\bullet} |\mathrm{d}\mu_{MN}| + \mathrm{d}\mu_{M^2} + \mathrm{d}\mu_{N^2}$$

则 $\mu_{MN}, \mu_{M^2}, \mu_{N^2} << \lambda$, 记它们关于 $\lambda$ 的 Radon-Nikodym 导数分别为 $R, U, V$, 则由 $(2-31)$ 式,

$$0 \leqslant U + 2tR + t^2V, \forall t \in Q_+, \lambda\text{a.s.}$$

因此

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mu_{MN}}{\mathrm{d}\lambda}\right| \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{d}\mu_{M^2}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\mu_{N^2}}{\mathrm{d}\lambda}} \qquad (2-32)$$

为证 $(2-30)$ 式, 不妨设右端有限, 由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\int_A |XY||\mathrm{d}\mu_{MN}| &= \int_A |XY||R|\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_A |XY|\sqrt{UV}\,\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \left(\int_A X^2U\,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_A Y^2V\,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_A X^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_A Y^2\,\mathrm{d}\mu_{N^2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

□

由于

$$\begin{aligned}|\mu_{MN}(A)| &\leqslant (\mu_{M^2}(R_+\times\Omega))^{\frac{1}{2}}(\mu_{N^2}(R_+\times\Omega))^{\frac{1}{2}} \\ &= (EM_\infty^2)^{\frac{1}{2}}(EN_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = \|M\|_{\mathfrak{M}^2}\|N\|_{\mathfrak{M}^2}\end{aligned}$$

因此 $\mu_{MN}$ 关于 $M, N$ 为有界双线性泛函.

**2.25定理** $\forall M, N \in \mathfrak{M}_0^2, H, G \in \mathcal{L}_M^2, X = \int H\,\mathrm{d}M, Y = \int G\,\mathrm{d}N$, 则

$$(X, N) = \int_{R_+\times\Omega} H\,\mathrm{d}\mu_{MN}, \forall N \in \mathfrak{M}_0^2 \qquad (2-33)$$

$$\left(\int H\,\mathrm{d}M, \int G\,\mathrm{d}N\right) = \int HG\,\mathrm{d}\mu_{MN} \qquad (2-34)$$

$$\left\|\int H\,\mathrm{d}M\right\|_{\mathfrak{M}^2}^2 = \int H^2\,\mathrm{d}\mu_{M^2} = \|H\|_{\mathcal{L}_M^2}^2 \qquad (2-35)$$

**证明** 设 $H = I_{(s,t]\times F}, F \in \mathcal{F}_s$, 此时 $X = I_F(M_t - M_s)$, 于是

$$\begin{aligned}
(X,N) &= EX_\infty N_\infty = E\,I_F(M_t N_\infty - M_s N_\infty) \\
&= E\{E\,(I_F(M_t N_\infty - M_s N_\infty)|\mathcal{F}_s)\} \\
&= EI_F\,\{E\,(E\,(M_t N_\infty|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) - E(M_s N_\infty|\mathcal{F}_s)\} \\
&= EI_F\,\{E\,(M_t N_t|\mathcal{F}_s) - M_s N_s\} \\
&= EI_F(M_t N_t - M_s N_s) \\
&= \int I_{(s,t]\times F}\,\mathrm{d}\mu_{MN}
\end{aligned}$$

利用内积的线性以及连续性便可证得 (2 − 33) 式、类似地可证 (2-34) 式，令 $H = G$ 便得 (2 − 35) 式. □

随机积分 $\int H\,\mathrm{d}M$ 可以看成为从 $\mathcal{L}_M^2$ 到 $\mathfrak{M}_0^2$ 的线性算子 $T_M$, 即

$$T_M H = \int H\,\mathrm{d}M \qquad (2-36)$$

记 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 为算子 $T_M$ 的值域.

我们可证明 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 的闭子空间. 事实上, 如果 $(X_n) \subseteq \mathrm{Rg}(T_M)$, 且 $\|X_n - X_m\|_{\mathfrak{M}^2} \to 0, (n,m\to\infty)$, 则由 (2 − 35) 式对应着有 $\|H_n - H_m\|_{\mathcal{L}_M^2} \to 0, (n,m\to\infty)$. 由于 $\mathcal{L}_M^2$ 的完备性推知,

存在 $H \in \mathcal{L}_M^2, X = \int H\mathrm{d}M$, 使得 $\|X_n - X\| \to 0$. 这表明 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 是 $\mathfrak{M}_0^2$ 的闭子空间.

由泛函分析知道，对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ ，如果有正交分解

$$\mathcal{H} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$$

其中 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间, 也即 $\forall x \in \mathcal{H}$, 有 $x = y + z$, 其中 $y \in \mathfrak{M}$, 而 $z \perp y$. 我们称 $Tx = y$ 的线性算子 $T$ 为从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的投影算子. 而且 $T$ 为投影算子 $\iff \forall x \in \mathcal{H}, \|Tx\|^2 = (Tx, x) \iff T^2 = T, T$ 为自共轭，即 $\forall x, y \in \mathcal{H}, (Tx, y) = (x, Ty)$.

$\forall A \in \mathcal{P}$, 引入:

$$\pi(A)M \triangleq T_M(I_A) = \int I_A \,\mathrm{d}M \tag{2-37}$$

则 $\forall A \in \mathcal{P}, \pi(A)$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的投影算子. 根据投影算子的定义，我们只需证明: $\forall M \in \mathfrak{M}_0^2$, 有

$$\|\pi(A)M\|^2 = (\pi(A)M, \pi(A)M) = (\pi(A)M, M)$$

这是正确的，因为左边 $= \left(\int I_A\mathrm{d}M, \int I_A\mathrm{d}M\right) = \mu_{M^2}(A) =$ 右边. 于是对任意的 $M, N \in \mathfrak{M}_0^2$, 我们有

$$\|\pi(A)M\|^2 = \mu_{M^2}(A) \tag{2-38}$$

$$(\pi(A)M, N) = \mu_{MN}(A) \tag{2-39}$$

**2.26定理** $\forall M \in \mathfrak{M}_0^2$, 随机积分算子 $T_M : \mathcal{L}_M^2 \to \mathfrak{M}_0^2$ 是 $\mathcal{L}_M^2$ 到 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 的线性同构. 若 $X \in \mathrm{Rg}(T_M)$, 则

$$T_M^{-1}X = \frac{\mathrm{d}\mu_{XM}}{\mathrm{d}\mu_{M^2}}, \mu_{M^2}\text{_a.s.}. \tag{2-40}$$

**证明** 只需证 (2 − 40) 式. 设 $H \in \mathcal{L}^2_M$, $X = T_M H$, 则由 (2 − 39) 式, 对 $\forall A \in \mathcal{P}$,

$$\mu_{XM}(A) = (X, \pi(A)M) = \int_A H \, \mathrm{d}\mu_{M^2}$$

所以

$$T_M^{-1} X = H = \frac{\mathrm{d}\mu_{XM}}{\mathrm{d}\mu_{M^2}}$$

□

设 $Q$ 为 $\mathfrak{M}^2_0$ 的闭子空间, 称它为 **稳定子空间** , 如果

$$\forall M \in Q \longrightarrow \forall A \in \mathcal{P}, \pi(A)M \in Q$$

亦即稳定子空间关于投影算子不变.

**2.27定义** 设 $M, N \in \mathfrak{M}^2_0$, 若 $MN$ 为鞅 (或等价地, $\mu_{MN} \equiv 0$), 则称 $M$ 与 $N$ 强正交, 记为 $M \perp\!\!\!\perp N$.

**注**: 对 $A \in \mathcal{P}$, 记投影 $\pi(A)$ 的取值空间为 $\mathfrak{M}^2_A$, 则由 $\mu_{MN}(A) = (\pi(A)M, N)$ 可知 $M \perp\!\!\!\perp N \iff N$ 与 $M$ 在闭子空间 $\mathfrak{M}^2_A$ 中的投影正交. 特别取 $A = R_+ \times \Omega$, 则由强正交推出它们在 $\mathfrak{M}^2_0$ 中正交.

**2.28定理** 设 $Q \subseteq \mathfrak{M}^2_0$ 为闭子空间, 则 $Q$ 为稳定子空间

$$\iff \forall M \in \mathfrak{M}^2_0, M \perp Q \longrightarrow M \perp\!\!\!\perp Q. \qquad (2-41)$$

**证明** 必要性: 设 $Q$ 为稳定子空间, 且 $M \perp Q$, 即 $\forall N \in Q, (M, N) = 0$. 由于 $Q$ 为稳定子空间, $\pi(A)N \in Q$, 因此, $\mu_{MN}(A) = (\pi(A)N, M) = 0$, 所以 $M \perp\!\!\!\perp N$.

充分性: 设 $M \in Q$, 满足 (2 − 41) 式, $\mathfrak{M}^2_0 = Q \oplus Q^\perp$. 若 $N \in Q^\perp$, 则由 (2 − 41) 式, $N \perp\!\!\!\perp M$, 亦即 $\forall A \in \mathcal{P}$,

$$(\pi(A)M, N)_{\mathfrak{M}^2} = \mu_{MN}(A) = 0$$

因而 $\pi(A)M\perp N$, 从而 $\pi(A)M\in Q$, 故 $Q$ 为稳定子空间. □

我们还可证明稳定子空间的正交补空间仍是稳定子空间; 对 $A\in\mathcal{P}, \mathfrak{M}^2_A$ 为稳定子空间, $\mathfrak{M}^2_c$ 及 $\mathfrak{M}^2_d$ 也是稳定子空间.

**2.29定理** 随机积分算子与投影算子可交换, 即对 $M\in\mathfrak{M}^2_0$, $H\in\mathcal{L}^2_M, \forall A\in\mathcal{P}$, 有

$$T_M(I_A H)=\pi(A)T_M(H) \tag{2-42}$$

**证明** 由于

$$\begin{aligned}(T_M(I_A(H)),N)_{\mathfrak{M}^2} &= \left(\int I_A H\,\mathrm{d}M, \int \mathrm{d}N\right)\\ &= \int_A H\,\mathrm{d}\mu_{MN}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}(\pi(A)T_M H,N)_{\mathfrak{M}^2} &= (T_M H,\pi(A)N)\\ &= \left(\int H\,\mathrm{d}M, \int_A \mathrm{d}N\right)\\ &= \int H\mathrm{d}\mu_{MN}\end{aligned}$$

所以 $T_M(I_A H)=\pi(A)T_M H$. □

**2.30定理** 若 $M\in\mathfrak{M}^2_0$, 则对任意的 $X\in\mathfrak{M}^2_0$, 存在唯一的可料过程 $H\in\mathcal{L}^2_M$, 以及唯一的 $N\in\mathfrak{M}^2_0$, 使得

$$X=\int H\mathrm{d}M+N \tag{2-43}$$

而且 $M \perp\!\!\!\perp N$.

**证明** 由于 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中闭，我们有正交分解

$$\mathfrak{M}_0^2 = \mathrm{Rg}(T_M) \oplus \mathrm{Rg}(T_M)^{\perp}$$

于是存在 $H \in \mathcal{L}_M^2, N \in \mathrm{Rg}(T_M)^{\perp}$，使得 (2−43) 成立. 往证 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 为稳定子空间，即设 $L = T_M H, H \in \mathcal{L}_M^2$，往证 $\forall A \in \mathcal{P}, \pi(A)L \in \mathrm{Rg}(T_M)$. 由定理 2.29, $\pi(A)T_M H = T_M I_A H$，而 $I_A H \in \mathcal{L}_M^2$，所以 $\pi(A)L = \pi(A)T_M H \in \mathrm{Rg}(T_M)$，此即 $\mathrm{Rg}(T_M)$ 为稳定子空间.

由 $N \in \mathrm{Rg}(T_M)^{\perp}$，推得 $N \perp\!\!\!\perp \mathrm{Rg}(T_M)$，即 $N \perp M$. 而 (2 − 43) 式分解的唯一性，由正交分解的唯一性而得. □

## §2.7 连续局部鞅的平方变差过程

我们记 $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$ 为所讨论概率空间上，关于 $\sigma$ 代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续局部鞅全体. 本节讨论连续局部鞅 (例如 Brownian 运动) 的平方变差过程，考虑 $[0,t]$ 区间的有限分割 $\pi_t^n : 0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = t, \delta\pi_t^n \triangleq \max_j |t_{j+1}^n - t_j^n|$ 表示分割的直径.

**2.31定理** 设 $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$，令

$$S_t^n = \sum_{j=0}^{k_n} \left( M_{t_{j+1}^n} - M_{t_j^n} \right)^2$$

当 $\delta\pi_t^n \to 0$ 时，

(1) 如 $M$ 有界，则 $S_t^n \xrightarrow{L^2} [M]_t$，其中

$$[M]_t \triangleq M_t^2 - M_0^2 - 2\int_0^t M_s \mathrm{d}M_s \qquad (2-44)$$

(2) $S_t^n \xrightarrow{P} [M]_t$.

我们称这里的 $\{[M]_t, t \in R_+\}$ 为 $M$ 的 **平方变差过程**.

**证明** 1) 设 $M$ 有界,

$$S_t^n = \sum_{j=0}^{k_n} \left[ M_{t_{j+1}^n}^2 - M_{t_j^n}^2 - 2M_{t_j^n}(M_{t_{j+1}^n} - M_{t_j^n}^2) \right]$$

$$= M_t^2 - M_0^2 - 2\int_0^t X^n \,\mathrm{d}M \tag{2-45}$$

其中 $X^n(s,\omega) = \sum_j M_{t_j^n}(\omega) I_{(t_j^n, t_{j+1}^n]}(s,\omega)$ 是有界可料过程. 由 $M$ 具左连续性, $\forall t \leqslant T, \omega \in \Omega, \lim\limits_{n\to\infty} I_{[0,t]}X^n = I_{[0,t]}M$, 而由 $M$ 的有界性,

$$\operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} \int_0^t X^n \,\mathrm{d}M = \int_0^t M \,\mathrm{d}M$$

所以

$$\operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} S_t^n = [M]_t$$

□

2) 现在只设 $M$ 连续局部鞅, (2 − 44) 式的右端等于

$$M_t^2 - M_0^2 - 2M_0(M_t - M_0) - 2\int_0^t (M_s - M_0)\,\mathrm{d}(M_s - M_0)$$

$$= (M_t - M_0)^2 - 2\int_0^t (M_s - M_0)\,\mathrm{d}(M_s - M_0)$$

因此在证明中不妨设 $M_0 = 0.\forall k$ 令 $\tau_k = \inf\{s > 0 : |M_s| > k\}$, 则 $\{\tau_k\}$ 是 $M$ 的局部化序列, 且 $M^k = \{M_{\tau_k \wedge s}, s \in R_+\}$ 是有界连续鞅. 因为

$$I_{(t\leqslant\tau_k)} S_t^n = I_{(t\leqslant\tau_k)} \sum_j \left( M_{t_{j+1}^n}^k - M_{t_j^n}^k \right)^2$$

将第一部分的结果用于 $M^k$, 可见上式右边在 $L^2$ 意义, 因而依概率收敛于 $[M^k]_t$. 而在 $\{\omega: t \leqslant \tau_k\}$ 上, $M^k = M$, $\int_0^t M^k \,\mathrm{d}M^k = \int_0^t M \,\mathrm{d}M$,a.s.. 故

$$I_{(t\leqslant\tau_k)}[M^k]_t = I_{(t\leqslant\tau_k)}[M]_t$$

当 $n \to \infty, \forall k$

$$I_{(t\leqslant\tau_k)}S_t^n \xrightarrow{P} I_{(t\leqslant\tau_k)}[M]_t$$

而 $P(\cup_k\{t \leqslant \tau_k\}) = 1$, 因此 $S_t^n \xrightarrow{P} M_t$.

特别当 $M = B$(Brownian 运动) 时, 则有

$$[B]_t = t \text{ a.s..} \tag{2-46}$$

事实上, 取 $t_j^n = \frac{jt}{n}, j = 0, 1, \cdots, n$,

$$E(S_t^n - t)^2 = D\sum_{j=0}^{n-1}\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)^2$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} D\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)^2 = \frac{3t^2}{n}$$

所以, $[B]_t = t$. a.s.. 下面的定理描述了 $L^2$ 鞅的平方变差过程的性质.

**2.32定理** 设 $M$ 为连续局部鞅, 则

(1) 记 $X_t \triangleq \int_0^t M_s \,\mathrm{d}M_s$, 则 $(X_t, \mathcal{F}_t, t \in R_+\}$ 为零初值的连续 $(L^2)$ 鞅.

(2) $[M]$ 是零初值的连续适应增过程，且 $\forall t$,

$$E[M]_t < \infty$$

(3) $\forall t, S_t^n \xrightarrow{L^1} [M_t]$.

(4) $\forall A \in \mathcal{A}$, 由增过程 $[M]$ 产生的容度

$$\lambda_{[M]}(A) \triangleq E\left(\int_0^\infty I_A \, \mathrm{d}[M]_s\right) \tag{2-47}$$

在 $\mathcal{A}$ 上，$\lambda_{[M]} = \mu_{M^2}$.

(5) $\forall X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$,

$$E\left(\int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}[M]_s\right) = \int_{R_+ \times \Omega} I_{[0,t]} X^2 \mathrm{d}\mu_{M^2} \tag{2-48}$$

**证明** 1) 由定理 2.17, $X_t$ 为连续局部鞅，令 $\{\tau_k\}$ 为它的局部化序列. 为证 $X_t$ 是鞅，根据引理 2.13, 只要证明对每个 $t \geqslant 0$, $X_{t\wedge\tau_k}$ 一致可积. 由 (2 − 44) 式我们有

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} M \mathrm{d}M = \frac{1}{2}\left(M_{t\wedge\tau_k}^2 - M_0^2 - [M]_{t\wedge\tau_k}\right)$$

于是

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} M \mathrm{d}M \leqslant \frac{1}{2}\left(M_{t\wedge\tau_k}^2 + M_0^2 + [M]_t\right) \tag{2-49}$$

因为 $\tau_k \wedge t \leqslant t$, 由 Doob 停止定理可知 $M_{t\wedge\tau_k}^2$ 一致可积, 而 $EM_0^2 < \infty, E[M]_t < \infty$, 故 $E\int_0^{t\wedge\tau_k} M \, \mathrm{d}M$ 一致可积. 于是 $\{\int_0^t M \, \mathrm{d}M, t \in R_+\}$ 是 $(L^2)$ 鞅，它的均值为 $X_0 = 0$.

2) 由 (2 - 44) 式知 $[M]_t$ 零初值，连续，适应．而 $ES_t^n = EM_t^2 - EM_0^2$ 由 Fatou 引理，

$$E[M]_t \leqslant \lim_{n\to\infty} ES_t^n \leqslant E(M_t^2 - M_0^2) < \infty$$

而 $S_t^n$ 显然是增过程，因此 $[M]_t$ 为增过程.

3) 由 (2−44) 式及上面的 $X_0 = 0$, 可得 $E[M]_t = E\left(M_t^2 - M_0^2\right)$. 而由 (2−45) 式我们有 $ES_t^n = E\left(M_t^2 - M_0^2\right)$, 所以 $ES_t^n = E[M]_t$. 由 $L^1$ 收敛原理 (th.0.8)，可知 $\forall t, S_t^n \xrightarrow{L^1} [M]_t$.

4) 我们只需证对一切 $R \in \mathcal{R}$

$$\lambda_{[M]}(R) = E\left(\int_0^\infty I_R \mathrm{d}[M]_s\right) = \mu_{M^2}(R)$$

当 $R = I_{\{0\}\times F_0}, F_0 \in \mathcal{F}_0$ 时， $\lambda_{[M]}(R) = \mu_{M^2}(R) = 0$, 而 $[M]_s$ 在 $s = 0$ 处连续，故 $\int_0^\infty I_R \,\mathrm{d}[M]_s = 0$;

当 $R = I_{(s,t]\times F}, F \in \mathcal{F}_s$ 时，我们有

$$\lambda_{[M]}(R) = E\left(I_F([M]_t - [M]_s)\right) = E\left(\int_0^\infty I_R \,\mathrm{d}[M]_s\right)$$

而

$$\begin{aligned}\mu_{M^2}(R) &= E\left(I_F(M_t^2 - M_s^2)\right) \\ &= E\left(I_F\left([M]_t - [M_s] + 2\int_s^t M \,\mathrm{d}M\right)\right)\end{aligned}$$

利用 $\int_0^t M\mathrm{d}M$ 的鞅性质，上式的第三项为 0, 故得所证.

5) $(2-47)$ 式的右端可以看成是定义了 $A \in \mathcal{P}$ 上的测度，而由 4) 及测度扩张的唯一性， $\mu_{M^2} = \lambda_{[M]}$.$(2-48)$ 式对 $\mathcal{P}$ 的示性函数成立，于是由单调类定理易知 $(2-48)$ 式成立. □

定理中假设 $M$ 为连续 $L^2$ 鞅，所以证得 $X \triangleq \int M \mathrm{d}M$ 为连续 $L^2$ 鞅；如果只假定 $M$ 为连续局部鞅，则由定理 2.17,$X$ 为连续局部鞅.

**2.33定义** 设 $M, N \in \mathfrak{M}^c_{\text{loc}}$, 我们称

$$[M, N] = \frac{1}{2}([M+N] - [M] - [N])$$

为 $M, N$ 的互变差过程，易见 $[M]$ 就是连续 (因而可料) 增过程，而 $[M, N]$ 是连续有限变差过程

**2.34定理** 设 $M, N$ 为连续 $L^2$ 鞅 (连续局部鞅), 则 $[M, N]$ 是使得 $MN - [M, N]$ 为连续鞅 (连续局部鞅) 的唯一的连续的适应有限变差过程，而且 $\forall t, E[M, N]_t < \infty$.

**证明** 利用 $[M, N]$ 的定义，我们只要证： $[M]$ 是使得 $M^2 - [M]$ 为连续鞅的连续适应增过程. 由定理 2.32 可知 $[M]$ 为零初值的连续适应增过程，且 $M^2 - [M]$ 为连续鞅 (连续局部鞅). 其唯一性可从下面的引理得到. □

**2.35引理** 设 $U, V$ 为连续增过程，且 $U_0 = V_0 = 0$, 如果 $U - V$ 还是鞅 (局部鞅)，则 $U, V$ 无区别.

**证明** 由轨道的连续性，我们只要证 $\forall t, U_t = V_t, P\text{-a.s.}$, 而由 $U_t \in \mathcal{F}_t, V_t \in \mathcal{F}_t$, 因此我们只需证： $\forall z \in b\mathcal{F}_t$(即有界的 $\mathcal{F}_t$ 可

---

⊖ 两个增过程之差称为有限变差过程.

测的随机变量) 有 $EzU_t = EzV_t$. 对任意的 $n$ 令

$$t_{jn} = \frac{jt}{n},\ j = 0, 1, \cdots, n$$

$$(\Delta U)_{jn} = U_{t_{jn}} - U_{t_{(j-1)n}},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

则对 $z \in b\mathcal{F}_t$,

$$E(zU_t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E\left(z(\Delta U)_{jn}\right)$$

由 $U$ 的适应性,

$$\begin{aligned} E(z(\Delta U)_{jn}) &= E\left\{Ez(\Delta U)_{jn}|\mathcal{F}_{jn}\right\} \\ &= E\left\{(\Delta U)_{jn}E(z|\mathcal{F}_{jn})\right\} \end{aligned}$$

记鞅 $E(z|\mathcal{F}_s), s \in R_+$ 的右连左极修正为 $Z_s, s \in R_+$, 则由上式,

$$EzU_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E(Z_{t_{jn}}(\Delta U)_{jn}) = E\left(\int_0^t Z_s \,\mathrm{d}U_s\right)$$

由 $U$ 的连续性, 在 $Z$ 的跳处 $\mathrm{d}U_s$ 无负荷, 因此有 $\int_0^t Z_s \mathrm{d}U_s = \int_0^t Z_{s-} \mathrm{d}U_s$. 注意到 $Z_-$ 的左连续性,

$$\int_0^t Z_{s-} \,\mathrm{d}U_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Z_{t_{(j-1)n}}(\Delta U)_{jn}$$

结合上述,

$$E(zU_t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Z_{t_{(j-1)n}}(\Delta U)_{jn}$$

对 $V$ 也有类似的表达. 因为 $U-V$ 为鞅,

$$E\left\{(\Delta U)_{jn}-(\Delta V)_{jn}|\mathcal{F}_{t_{(j-1)n}}\right\}=0$$

因此

$$E\left(Z_{t_{(j-1)n}}(\Delta U)_{jn}\right)=E\left(Z_{t_{(j-1)n}}(\Delta V)_{jn}\right), j=1,\cdots,n$$

由此得到 $E(zU_t)=E(zV_t)$. 因此 $U$ 与 $V$ 无区别.

当 $U-V$ 为局部鞅时, 利用局部化及极限手续同样可证 $U$ 与 $V$ 无区别. □

上述引理可以叙述为: 对于一个连续的变差鞅 $X$, 我们有

$$X\equiv X_0.$$

进一步, 我们还有

**2.36定理** 设 $X$ 为零初值的可料可积变差鞅, 则 $X\equiv 0$.

**证明** $X$ 为可积变差鞅, $X$ 可表为两个可积增过程之差 $X=A-B$, 且$\forall s>t, E(X_s|\mathcal{F}_t)=X_t$. 令 $s\to\infty$, 由控制收敛定理得 $X_t=E(X_\infty|\mathcal{F}_t)$, 因而可积变差鞅是一致可积鞅.

其次, 文献 [1] 之 3.22 系指出对停时 $T$, 在 $T<\infty$ 上定义的 $f(\omega)=(\omega,T(\omega))$, 有

$$f^{-1}(\mathcal{P})\subseteq[T<\infty]\cap\mathcal{F}_{T-}$$

由此及 Doob 停止定理, 我们有

$$X_T=E(X_T|\mathcal{F}_{T-})=X_{T-}$$

由截口定理, 可见 $X$ 与 $X_-$ 无区别, 这证明了可料一致可积鞅 $X$ 为连续鞅, 从而由引理 2.35 知零初值可料可积变差鞅恒为 0. □

注意！定理 2.34 给出了连续 $L^2$ 鞅 (连续局部鞅) 的 D-M 分解:

$$M_t^2 = (M_t^2 - [M]_t) + [M]_t \tag{2-50}$$

它是一般的对右连续 $L^2$ 鞅 (连续局部鞅) 的 Doob-Meyer 分解

$$M_t^2 = (M_t^2 - \langle M \rangle_t) + \langle M \rangle_t$$

的特殊形式，此时

$$\langle M \rangle \equiv [M] \tag{2-51}$$

自然想到对于一般的右连续局部鞅能否定义平方变差过程，还是否存在类似于 $(2-50)$ 式的分解. 文献 [1] 的 7.29 ~7.31 给出了相应的结果, 并证明了那里的 $[M]$ 是 $\langle M \rangle$ 的可料对偶投影.

## 习题与问题二

2.1 设 $(B_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为 Brownian 运动， $\sigma$ 为停时，令 $\widetilde{B}_t = B_{t\wedge\sigma}, \widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\sigma\wedge t}$, 则 $(\widetilde{B}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t), t \in R_+$ 为鞅，且 $\forall t \geqslant s$,

$$E(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s | \widetilde{\mathcal{F}}_s) = 0$$

$$E\left[(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)^2 | \widetilde{\mathcal{F}}_s\right] = E\left[(t\wedge\sigma) - (s\wedge\sigma) | \widetilde{\mathcal{F}}_s\right]$$

2.2 证明 $(2-8)$ 式所定义的随机积分不依赖于逼近序列 $(X_n)$ 的选取.

2.3 证明：如果 $\langle M \rangle_t$a.s. 连续 (相应地， a.s. 绝对连续)，则 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{L}_M^2(\mathfrak{D})$(相应地， $\mathcal{L}_M^2(\mathcal{S})$) 中稠密，这样便可对满足

$$\int_{R_+\times\Omega} X^2 \,\mathrm{d}\mu_{M^2}$$

的循序过程或可测的适应过程 $X$ 对平方可积鞅 $M$ 的随机积分.

2.4 设 $(X_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为局部鞅，则适当地选取局部化序列 $\tau_n$, 可使 $X_k^{\tau}$ 为一致可积鞅.

2.5 从本章及全书体会并学会采用停时的局部化技术, 试举例说明它的作用.

2.6 证明稳定子空间的正交补空间仍是稳定子空间; 对 $A \in \mathcal{P}, \mathfrak{M}_A^2$ 为稳定子空间, $\mathfrak{M}_c^2$ 及 $\mathfrak{M}_d^2$ 也是稳定子空间.

2.7 研究可料过程与连续过程的关系, 能否给出定理 2.36 新的证明?

2.8 证明若 $M \in \mathfrak{M}_0^2, H \in \mathcal{L}_M^2(\mathcal{P}), X = T_M H$, 则 $\mu_{X^2} \ll \mu_{M^2}$, 且

$$H^2 = \frac{\mathrm{d}\mu_{X^2}}{\mathrm{d}\mu_M^2},\ \mu_{M^2} - \text{a.s..}$$

2.9 将 2.30 定理推广到局部平方可积鞅的情形.

2.10 参考 3.1 关于连续半鞅的定义, 如何将随机积分推广到对连续半鞅的随机积分.

2.11 设 $M, N \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$, 证明对任意停时 $\tau$ 有

$$[M^{\tau}, N^{\tau}] = [M, N]^{\tau}$$

2.12 设 $M, \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$, 证明它为连续 $L^2$ 鞅当且仅当 $\forall t \in R_+$, 有 $E([M]_t) < \infty$.

2.13 设 $M, N$ 为连续 $L^2$ 鞅, $H \in \mathcal{L}_M^2(\mathcal{P}), G \in \mathcal{L}_N^2(\mathcal{P})$, 证明

$$E\left[\left(\int_s^t H_u \mathrm{d}M_u\right)\left(\int_s^t G_u \mathrm{d}N_u\right)|\mathcal{F}_s\right]$$
$$= E\left[\int_s^t H_u G_u \,\mathrm{d}[M, N]_u |\mathcal{F}_s\right]$$

2.14 设 $M \in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}$, 则对任意的 $a>0, c>0, t>0$ 有

$$P\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|\geqslant c\right]\leqslant \frac{a}{c^2}+P\left\{[M]_t\geqslant a\right\}$$

2.15 在上题的条件下，证明指数不等式：

$$P\{[M]_t<a;\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|\geqslant c\}\leqslant 2\exp\{-c^2/2a\}$$

2.16 设 $\{M^{(n)}\}\subseteq \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}, M\in \mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}$, 且对 $t>0$, 有

$$[M^{(n)}-M]_t \xrightarrow{P} 0,\ (n\to\infty)$$

则

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|M^{(n)}_s-M_s|\xrightarrow{P} 0.(n\to\infty)$$

2.17 参考文献 [2]§2.9, 研究对于可测适应过程 $\beta_t$, 如果

$$P\left(\int_0^T \beta_t^2\,\mathrm{d}t=\infty\right)>0$$

如何定义对 Brownian 运动的随机积分？

# 第三章　Ito 公式与 Girsanov 定理

在讨论了随机积分的基础上，我们讨论随机微分．设下式有意义： $X_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}M_s$, 其中 $M$ 为连续局部鞅．那么我们记 $\mathrm{d}X_t = H_t \mathrm{d}M_t$, 并称之为随机微分．在这里我们并不如文献 [4] 引入随机微分的空间，而只把随机微分看成一个记号，它是随机积分的附属物． Ito 公式就是讨论复合函数的微分公式，其实就是讨论复合函数的随机积分公式．

## §3.1　连续半鞅的 Ito 公式

称 $X = (X_t, \mathcal{F}_t), y \in R_+$ 为连续半鞅，是指它有分解：

$$X_t = X_0 + M_t + V_t \tag{3-1}$$

其中 $M \in \mathfrak{M}_{\text{loc}}^c, V \in \mathcal{V}_0^c$(连续零初值有限变差过程)，而 $X_0 \in \mathcal{F}_0$. 许多应用随机过程可表达为一个平均轨道 (有限变差) 与一个随机偏差 (噪声) 之和，半鞅就是它的模型．

称

$$X_t = \int_0^t a(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s,\omega)\mathrm{d}B_s \tag{3-2}$$

为 Ito **过程**，它就是一个连续半鞅，其中 $a(s,\omega), b(s,\omega)$ 分别为可

测的适应过程，且

$$\int_0^T |a(s,\omega)|\,\mathrm{d}s < \infty, \int_0^T b^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty$$

**3.1引理** 连续半鞅的分解式 (3 − 1) 是唯一的.

**证明** 如果还有另一具相同条件的分解 $X_t = X_0 + M_t' + V_t'$, 则

$$V_t - V_t' = M_t' - M_t$$

就是连续的零初值有限变差鞅，由引理 2.33，它恒为 0, 从而分解式 (3 − 1) 唯一. □

**3.2定理 (Ito 公式)** 设连续半鞅 $X$ 有分解式 (3-1), $f = f(x,y,z)$ 为 $R_+^3$ 上函数，关于 $x$ 二次，关于 $y$ 一次连续可微，关于 $z$ 为 Borel 可测，令

$$Y_t = f(M_t, V_t, X_0), t \in R_+$$

则 $Y = (Y_t)$ 为连续半鞅，且 $\forall t \in R_+$, 有

$$\begin{aligned} f(M_t,V_t,X_0) = f(0,0,X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s,V_s,X_0)\mathrm{d}M_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(M_s,V_s,X_0)\mathrm{d}V_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s,V_s,X_0)\mathrm{d}[M]_s \end{aligned} \quad (3-3)$$

**证明** 记 $V$ 的全变差为 $\overline{V}, \forall n \in N$, 令

$$\tau_n = \begin{cases} 0, & |X_0| > n \\ \inf\{t : |M_t| \vee \overline{V}_t \vee [M]_t > n\}, & |X_0| \leqslant n \end{cases}$$

则 $\tau_n$ 为停时列 $\uparrow\infty$ a.s.. 我们只需 $\forall n$, 在 $(\tau_n>0)$ 上，对停止过程 $X^{\tau_n}$ 证得 (3 − 3) 式，再令 $n\to\infty$, 利用 $f$ 及所论的一阶，二阶偏导数的连续性，就可完成 Ito 公式的证明. 因此不妨假定 $X_0, M, \overline{V}$ 以及 $[M]$ 均有界，且 $f$ 具有紧支集 (因而其本身及其一、二阶导数有界).

$\forall t>0$, 如前，考虑 $[0,t]$ 的分割序列 $\{\pi_t^n\}$, 由 Taloy 展开至二阶得

$$
\begin{aligned}
&f(M_t,V_t,X_0)-f(0,0,X_0)\\
=&\sum_{j=1}^{k_n}\left[f(M(t_j^n),V(t_j^n),X_0)-f(M(t_j^n),V(t_{j-1}^n),X_0)\right]\\
&+\sum_{j=1}^{k_n}\left[f(M(t_j^n),V(t_{j-1}^n),X_0)-f(M(t_{j-1}^n),V(t_{j-1}^n),X_0)\right]\\
=&I_1^n+I_2^n+I_3^n
\end{aligned}
\tag{3-4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1^n &\triangleq \sum_{j=1}^{k_n} f_y'(M(t_j^n),\theta_j^n,X_0)(V(t_j^n)-V(t_{j-1}^n)),\\
&\qquad V(t_{j-1}^n)\leqslant\theta_j^n\leqslant V(t_j^n)\\
I_2^n &\triangleq \sum_{j=1}^{k_n} f_x'(M(t_{j-1}^n),V(t_{j-1}^n),X_0)(M(t_j^n)-M(t_{j-1}^n))\\
I_3^n &\triangleq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n} f_{x^2}''(\widetilde{\theta}_j^n,V(t_{j-1}^n),X_0)(M(t_j^n)-M(t_{j-1}^n))^2\\
&\qquad M(t_{j-1}^n)\leqslant\widetilde{\theta}_j^n\leqslant M(t_j^n)
\end{aligned}
$$

显然当 $\delta(\pi_t^n) \to 0$ 时，作为按轨道的 Stieltjes 积分和

$$I_1^n \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_0^t f_y'(M_s, V_s, X_0) \mathrm{d}V_s \tag{3-5}$$

记

$$\phi^n(s,\omega) \triangleq \sum_{j=1}^{k_n} f_x'(M(t_{j-1}^n), V(t_{j-1}^n), X_0) I_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(s)$$

则对任意的 $\omega$ 及 $s \in [0,t], \phi^n \to f_x'(M_s, V_s, X_0)$. 因 $f_x'$ 及 $M$ 有界，此收敛也是 $\mathcal{L}_M^2$ 中的收敛. 因此

$$I_2^n = \int_0^t \phi_s^n \, \mathrm{d}M_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t f_x'(M_s, V_s, X_0) \, \mathrm{d}M_s \tag{3-6}$$

剩下只需证明：

$$I_3^n \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \int_0^t f_{x^2}''(M_s, V_s, X_0) \, \mathrm{d}[M]_s \tag{3-7}$$

记 $H(s) \triangleq f_{x^2}''(M_s, V_s, X_0)$, 则它是有界连续适应过程，由 $f_{x^2}''$ 以及 $M$ 的一致连续性，当 $\delta(\pi_t^n) \to 0$ 时，

$$\delta_n \triangleq \max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} |f_{x^2}''(\widetilde{\theta}_j^n, V(t_{j-1}^n), X_0) \\ - f_{x^2}''(M(t_{j-1}^n), V(t_{j-1}^n), X_0)| \xrightarrow{P} 0.$$

而根据 2.31 定理 $S_t^n$ 是 $L^2$ 收敛的，故

$$|I_3^n - \widetilde{I}_3^n| \leqslant \frac{1}{2} \delta_n S_t^n \xrightarrow{P} 0$$

其中 $\widetilde{I}_3^n$ 是将 $I_3^n$ 表达式中的 $\widetilde{\theta}_j^n$ 用 $M(t_{j-1}^n)$ 替换的结果. 记 $H = \frac{1}{2}f''_{x^2}(M, V, X_0)$, 为证 (3 − 7) 式只需证明当 $\delta(\pi_t^n) \to 0$ 时,

$$S_n \triangleq \sum_{j=1}^{k_n} H(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))^2 \xrightarrow{P} \int_0^t H_s \, \mathrm{d}[M]_s \quad (3-8)$$

记

$$\widetilde{S}_n \triangleq \sum_{j=1}^{k_n} H(t_{j-1}^n)([M](t_j^n) - [M](t_{j-1}^n))$$

显然有

$$\widetilde{S}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_0^t H_s \, \mathrm{d}[M]_s$$

现在为证 (3 − 7) 式只需证 $\widetilde{S}_n - S_n \xrightarrow{P} 0$. 对 $0 \leqslant r < s \leqslant t$ 有

$$\begin{aligned}
&(M_s - M_r)^2 - ([M]_s - [M]_r) \\
&= (M_s^2 - [M]_s) - (M_r^2 - [M]_r) - 2M_r(M_s - M_r) \\
&= 2\left[\int_r^s M_u \, \mathrm{d}M_u - M_r(M_s - M_r)\right]
\end{aligned}$$

记

$$H^n = \sum_{j=1}^{k_n} H(t_{j-1}^n) I_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}$$

$$M^n = \sum_{j=1}^{k_n} M(t_{j-1}^n) I_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}$$

则

$$
\begin{aligned}
& S_n - \widetilde{S}_n \\
= & 2\sum_{j=1}^{k_n} H(t_{j-1}^n)\left[\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} M_u \,\mathrm{d}M_u - M(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))\right] \\
= & 2\sum_{j=1}^{k_n}\left(\int_{(t_{j-1}^n, t_j^n]} H(t_{j-1}^n)M_u \mathrm{d}M_u - \int_{(t_{j-1}^n, t_j^n]} H(t_{j-1}^n)M(t_{j-1}^n)\mathrm{d}M_u\right) \\
= & 2\int_0^t H_u^n(M_u - M_u^n)\mathrm{d}M_u
\end{aligned}
$$

由 $H$ 及 $M$ 的连续性， $H^n(M-M^n)$ 在 $[0,t]\times\Omega$ 上收敛于 0, 而由 $H, M$ 的有界性可知在 $\mathcal{L}_M^2$ 中收敛于 0, 由随机积分的等距同构性质， $S_n - \widetilde{S}_n \xrightarrow{L^2} 0$, 更有 $S_n - \widetilde{S}_n \xrightarrow{P} 0$, (3 − 7) 式得证. 利用已证得的结果，在 (3 − 4) 式中令 $\delta(\pi_t^n) \to 0$, 则得证 $\forall t$, (3 − 3) 式 a.s. 成立，而 (3 − 3) 式两边均为连续过程，因此 (3 − 3) 式在无区别意义下成立. □

我们常常把 (3 − 3) 式写成微分的形式:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(M_t, V_t, X_0) = & f_x'(M_t, V_t, X_0)\mathrm{d}M_t + f_y'(M_t, V_t, X_0)\mathrm{d}V_t \\
& + \frac{1}{2} f_{x^2}''(M_t, V_t, X_0)\mathrm{d}[M]_t \qquad (3-9)
\end{aligned}
$$

Ito 公式一个常用形式是对 Ito 过程函数的微分.

**3.3推论** 设 $X = (X_t)$ 是形如 (3 − 2) 式的 Ito 过程， $f(x)$

为二次连续可微函数，则

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t f'(X_s)b(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s \\ &+ \int_0^t f'(X_s)a(s,\omega)\mathrm{d}s \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)b^2(s,\omega)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3-10}$$

**证明** 令 $g(x,y,z) = f(x+y+z)$, 则 $g$ 满足 3.2 定理的条件, 且 $g(M_t,V_t,X_0) = f(X_t), g(0,0,X_0) = f(X_0)$; $g'_x(M_t,V_t,X_0) = f'(X_t) = g'_y(M_t,V_t,X_0), g''_{x^2}(M_t,V_t,X_0) = f''(X_t)$. 又相应的 $[M]_t = \int_0^t b^2(s,\omega)\,\mathrm{d}s$, 直接应用 3.2 定理即得证. □

**3.4推论** 设 $X=(X_t)$ 是形如 (3 − 2) 式的 Ito 过程， $f(t,x)$ 关于 $t$ 一次连续可微，关于 $x$ 二次连续可微函数，则

$$\mathrm{d}f(t,X_t) = \left(f'_t + f'_x a + \frac{1}{2}f''_{x^2}b^2\right)\mathrm{d}t + f'_x b\,\mathrm{d}B_t \tag{3-11}$$

下面是 Ito 公式的多维形式.

**3.5定理** 设 $M=(M^1,M^2,\cdots,M^m)$ 为 $m$ 维连续局部鞅, $V=(V^1,\cdots,V^n)$ 为 $n$ 维连续有限变差过程，函数 $f=f(x,y)\triangleq f((x_1,\cdots,x_m),(y_1,\cdots,y_n))$ 关于 $y_j(j=1,\cdots,n)$ 一阶连续可微, 关于 $x_i(i=1,\cdots,x_m)$ 二阶连续可微，令 $Y_t = f(M_t,V_t)$, 则

$Y=(Y_t)$ 仍为连续半鞅，且 $\forall t\in R_+$，有

$$\begin{aligned} f(M_t,V_t) &= f(M_0,V_0)+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_s,V_s)\,\mathrm{d}M_s^i \\ &\quad +\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(M_s,V_s)\mathrm{d}V_s^j \\ &\quad +\frac{1}{2}+\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_s,V_s)\,\mathrm{d}[M^i,M^j]_s \qquad (3-12) \end{aligned}$$

**证明** 证明与一维情形类似. □

与 (3 − 10) 式类似，我们有

**3.6定理** 设 $X=(X^1,\cdots,X^m)$ 为 $m$ 维连续半鞅，具分解

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + V_t^i$$

其中 $X_0^i\in\mathcal{F}_0, M^i$ 为连续局部鞅， $V^i$ 为连续有限变差过程，$f\in C_b^2(R^d)$(具直到二阶有界连续偏导数)，则 $f(X_t)$ 为连续半鞅，且

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\mathrm{d}X_s^i \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\mathrm{d}[M^i,M^j]_s \qquad (3-13) \end{aligned}$$

特别当 $f(x,y)=xy, X_t=X_0+M_t+U_t, Y_t=Y_0+N_t+V_t$，则

$$X_tY_t = X_0Y_0+\int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s+\int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s+[M,N]_t \qquad (3-14)$$

容易看出当 $X,Y$ 只是连续有限变差过程时， (3 − 14) 式便为 Stieltjes 分部积分公式.

令 $W=(W^1,\cdots,W^d)$ 为 $d$ 维 Brownian 运动，并设

$$\mathrm{d}X_t = a(t,X_t)\mathrm{d}t + b(t,X_t)\mathrm{d}W_t$$

即

$$M^i = \sum_{j=1}^{\mathrm{d}} \int_0^t b_{ij}(s,X)\,\mathrm{d}B_s,\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

其中 $b_{ij}(s,X)$ 为可测适应过程，满足 $\int_0^t b_{ij}^2(s,X)\,\mathrm{d}s < \infty, 1 \leqslant i,j \leqslant m$. 而

$$V^i = \int_0^t a^i(s,X)\,\mathrm{d}s,\ 1 \leqslant i \leqslant m$$

其中 $a^i(s,X)$ 为可测适应过程, 且 $\int_0^t |a^i(s,X)|\mathrm{d}s < \infty, i=1,2,\cdots,m$.

类似于 3.4 推论我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}f(t,X_1,\ldots,X_m)\\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} a^i(t,X) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\sum_{l=1}^d b_{il}b_{jl}(t,X)\right]\mathrm{d}t\\
&\quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\sum_{l=1}^d b_{il}(t,X)\,\mathrm{d}W_l(t)\\
&\triangleq \boldsymbol{L}f\,\mathrm{d}t + (\boldsymbol{\nabla} f, B\mathrm{d}W_t) \qquad (3-15)
\end{aligned}$$

这里

$$\boldsymbol{L}f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} a^i(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \sigma_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$\sigma_{ij}(t,x) = \sum_{l=1}^d b_{il}(t,x)b_{jl}(t,x)$$

为 $BB^*$ 的元素， $B=(b_{il}(t))$ 为矩阵， $B^*$ 为其转置，

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$

为梯度算子.

当 $f=f(x)$, 只是 $x$ 的函数时，

$$Lf(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}a^i(t,x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\sigma_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$$

$$\sigma_{ij}(t,x)=\sum_{l=1}^{d}b_{il}(t,x)b_{jl}(t,x)$$

今后我们将知道，这里的算子 $L$ 恰是马氏过程的无穷小算子.

下面的简单例子，表明随机积分与 Lebesgue-Stiltjes 积分的不同.

**例 1** 证明

$$I\triangleq\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s=\frac{1}{2}(B_t^2-t)$$

令 $Y_t=\dfrac{1}{2}B_t^2$, 则由 Ito 公式 $\mathrm{d}Y_t=B_t\mathrm{d}B_t+\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$ 从而 $I=\dfrac{1}{2}(B_t^2-t)$.

**例 2** 计算 $I\triangleq\displaystyle\int_0^t s\mathrm{d}B_s$

由 $\mathrm{d}(tB_t)=B_t\mathrm{d}t+t\mathrm{d}B_t$, 则

$$I=\int_0^t s\mathrm{d}B_s=tB_t-\int_0^t B_s\mathrm{d}s.$$

## §3.2 指数鞅与 Girsanov 定理

下面应用 Ito 公式得到 Brownian 运动的鞅刻划以及关于测度变换的 Girsanov 定理，测度变换被广泛应用到数理金融学，那里的等价鞅测度成为衡量市场公平性的依据.

**3.7定理** 设 $X=(X_t,\mathcal{F}_t), X_0=0$, 则以下的命题等价:

1) $X$ 是 Brownian 运动;

2) $X$ 是连续局部鞅，且 $[X]_t=t. t\in R$;

3) 对任意的 $\alpha\in R, Z_t^\alpha \triangleq \exp\left\{i\alpha X_t+\dfrac{\alpha^2}{2}t\right\}$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 连续鞅.

**证明** 1) ⇒ 2) 是已知的，往证 2) ⇒ 3).

令 $f(x,t)=\exp\left\{i\alpha x+\dfrac{\alpha^2}{2}t\right\}$, 由 Ito 公式得到

$$Z_t^\alpha=1+i\alpha\int_0^t Z_s^\alpha \mathrm{d}X_s$$

因为 $|Z_s^\alpha|\leqslant\exp\left(\dfrac{\alpha^2}{2}s\right)$, 在任一有限区间有界，故 $(Z_t^\alpha)$ 为连续局部鞅，而由 $|Z_t^\alpha|$ 的有界性， $|Z_{t\wedge\tau_k}^\alpha|$ 一致可积，故 $Z_t^\alpha$ 为连续 $L^2$ 鞅.

往证 3) ⇒ 1), 由 $Z^\alpha$ 的鞅性，对 $s<t,\alpha\in R$,

$$E\left[\exp\{i\alpha(X_t-X_s)+\frac{\alpha^2}{2}(t-s)\}|\mathcal{F}_s\right]=0$$

可见 , $X_t-X_s$ 关于 $\mathcal{F}_s$ 的条件特征函数为 $N(0,t-s)$ 的特征函数，故 $X_t-X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，而且服从 $N(0,t-s)$ 分布，从而 $X$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ Brownian 运动. □

下面的定理是到一般连续局部鞅的推广.

**3.8定理** 设 $M$ 为零初值连续适应过程, $V$ 为连续增过程, 则以下命题等价:

1) $M$ 为局部鞅, 且 $[M]=V$;

2) $\forall\alpha\in R, Z_t^\alpha\triangleq\exp\left\{\alpha M_t-\frac{\alpha^2}{2}V_t\right\}$ 为局部鞅.

若上述条件满足, 则 $Z^\alpha$ 为上鞅, 而且 $Z^\alpha$ 为鞅当且仅当 $\forall t\in R_+, EZ_t^\alpha=1$.

**证明** 1) $\Rightarrow$ 2) 对任意的 $\alpha\in R$, 对 $f(x,y)=\exp\left\{\alpha x-\frac{\alpha^2}{2}y\right\}$ 应用 Ito 公式 $(3-3)$, 得到

$$\mathrm{d}Z_t^\alpha=\alpha Z_t^\alpha\mathrm{d}M_t$$

故 $Z^\alpha$ 仍为连续局部鞅.

2) $\Rightarrow$ 1) 不妨设 $M,V$ 有界, 且 $Z^\alpha$ 为鞅, 否则考虑停时列 $\tau_n\triangleq\inf\{t:|M_t|\vee|V_t|\geqslant n\}\wedge\sigma_n$ 及停止过程 $M^{\tau_n},V^{\tau_n},(Z^\alpha)^{\tau_n}$, 这里 $\sigma_n$ 为 $(Z^\alpha)$ 的局部化序列. 于是对 $s<t$ 及 $F\in\mathcal{F}_s$, 有

$$\int_F\exp\left\{\alpha M_s-\frac{\alpha^2}{2}V_s\right\}\mathrm{d}P=\int_F\exp\{\alpha M_t-\frac{\alpha^2}{2}V_t\}\,\mathrm{d}P\qquad(*)$$

由控制收敛定理, 可在积分号下对上式关于 $\alpha$ 微分, 并令 $\alpha=0$ 则得

$$\int_F M_s\,\mathrm{d}P=\int_F M_t\,\mathrm{d}P$$

如 * 式对 $\alpha$ 二次微分, 令 $\alpha=0$ 则得

$$\int_F(M_s^2-V_s)\mathrm{d}P=\int_F(M_t^2-V_t)\mathrm{d}P\qquad(3-16)$$

于是 $M$ 及 $M^2-V$ 为连续鞅，因为 $[M]$ 为使 $M^2-[M]$ 为连续鞅的唯一连续增过程，故 $[M]=V$.

当上述条件满足时，

$$Z_t^\alpha=\exp\left\{\alpha M_t-\frac{\alpha^2}{2}[M]_t\right\} \tag{3-17}$$

为正局部鞅，若 $\{\tau_n\}$ 为其局部化序列，对 $s<t, n\in N$ 有

$$(Z_s^\alpha)^{\tau_n}=E\left[(Z_t^\alpha)^{\tau_n}|\mathcal{F}_s\right]$$

令 $n\to\infty$, 由 Fatou 引理得:

$$Z_s^\alpha\geqslant E\left[Z_t^\alpha|\mathcal{F}_s\right]$$

故 $Z^\alpha$ 为上鞅，因 $Z_0^\alpha=1$, 显然当且仅当 $E(Z_t^\alpha)\equiv 1$ 时， $Z^\alpha$ 为鞅. □

上述的 $Z^\alpha$ 称为 Doléans-Dade**指数鞅**，称 (3–17) 式为 Doléans-Dade 指数公式，并记

$$Z_t=\varepsilon_t(\alpha M)$$

用 Ito 公式，我们可验证它是随机微分方程

$$Z_t=1+\int_0^t\alpha Z_s\mathrm{d}M_s$$

的解. 下面讨论由它引出的测度变换. 如果 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间， $(\mathcal{F}_t)$ 为满足通常条件的子 $\sigma$ 代数流， $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty$. 对任意的 $A\in\mathcal{F}$, 令

$$Q(A)=\int_A Z_\infty^\alpha\mathrm{d}P$$

则由 $Z_\infty^\alpha > 0$, 可知 $Q$ 与 $P$ 为 **等价测度**， $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ 仍为完备的概率空间；$(\mathcal{F}_t)$ 关于测度 $Q$ 仍然满足通常条件；关于 $P$ 与关于 $Q$ 的可选、可料 $\sigma$ 代数，以及可选、可料过程完全一致. 记

$$N_\infty \triangleq \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = Z_\infty^\alpha$$

而 $(N_t)$ 为一致可积正鞅 $\{E(N_\infty|\mathcal{F}_t), t\in R_+\}$ 的右连续修正，由一致可积性可知它是 Doob 停止鞅，右闭鞅. 因此，对任意的停时 $\tau$ 及 $F\in\mathcal{F}_\tau$,

$$\int_F N_\tau \mathrm{d}P = \int_F N_\infty \mathrm{d}P = Q(F)$$

于是,

$$N_\tau = E\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|\mathcal{F}_\tau\right)$$

**3.9命题** 设 $X$ 为一适应过程，则当且仅当 $XN$ 为 $P$ 鞅 (局部鞅) 时， $X$ 为 $(Q)$ 鞅 (局部鞅)

证明由 Bayes 法则 0.12 定理可得.

**3.10定理** (Girsanov) 设 $W=(W_t), 0\leqslant t\leqslant T$ 为 Brownian 运动， $H\in\Lambda_w^2(S,B)$, 令

$$Z_t(H) \triangleq \exp\left\{\int_0^t H_s\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\mathrm{d}s\right\}$$

假定

$$EZ_T(H) = 1 \qquad (3-18)$$

对任意的 $A\in\mathcal{F}_T$, 令 $Q(A)\triangleq\int_A Z_T(H)\,\mathrm{d}P$ 及

$$W_t^* \triangleq W_t - \int_0^t H_s\,\mathrm{d}s, \quad 0\leqslant t\leqslant T \qquad (3-19)$$

则 $Q$ 为与 $P$ 等价的概率测度， $W^*$ 为关于测度 $Q$ 的 Brownian 运动.

**证明** 由 3.8 定理可知， $(Z_t(H)), 0 \leqslant t \leqslant T$ 为一致可积正鞅. 为了证明 $W^*$ 为 $Q$ Brownian 运动，由 3.7 定理只要证

$$Y_t^\alpha \triangleq \exp\left\{i\alpha W_t^* + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}$$

为 $(Q)$ 连续局部鞅，而由 3.9 命题，只要证 $Y_t^\alpha Z_t(H)$ 为 $(P)$ 连续局部鞅. 因为

$$\begin{aligned} Y_t^\alpha Z_t(H) = \exp\Big\{ & \int_0^t (H_s + i\alpha)\mathrm{d}W_s \\ & -\frac{1}{2} < \int_0^t (H_s + i\alpha)\,\mathrm{d}W_s > \Big\} \end{aligned}$$

由于 $\int_0^t (H_s+i\alpha)\mathrm{d}W_s$ 为 $P$ 连续局部鞅, 则由 3.8 定理知 $Y_t^\alpha Z_t(H)$ 为连续局部鞅，且 $< W^* >= t, Q-$a.s.. □

多维情形的 Girsanov 定理完全类似：

**3.11定理 (多维情形 Girsanov 定理)** 设 $W=(W^1, W^2, \ldots, W^d)$ 为 $[0,T]$ 上 $d$ 维 Brownian 运动， $H \in (\Lambda_w^2(S,B))^d$, (表示 $d$ 维过程，每个分量属于 $\Lambda_w^2(S,B)$) 令

$$Z_t(H) \triangleq \exp\left\{\int_0^t (H_s, \mathrm{d}W_s) - \frac{1}{2}\int_0^t |H_s|^2\,\mathrm{d}s\right\}$$

假定 $EZ_T(H)=1$, 则 $Q \triangleq \int Z_T(H)\mathrm{d}P$ 为与 $P$ 等价的概率测度,

$$W_t^* = W_t - \int_0^t H_s\,\mathrm{d}s$$

为 $d$ 维 $(Q)$Brownian 运动.

从上面的讨论中，我们看到条件 (3 − 18) 式的重要性，它保证了 $Q$ 为概率测度. 下面的定理给出它成立的充分性条件.

**3.12定理** (Novikov) 设 $M$ 为零初值连续局部鞅，且

$$Z_t \triangleq \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\} \quad t \in R_+ \tag{3-20}$$

若对任意的 $t \in R_+$, 有

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}[M]_t\right)\right] < \infty \tag{3-21}$$

则 $(Z_t)$ 为连续鞅，即 $\forall t \in R_+, E\,Z_t = 1$.

**证明** 由 3.8 定理可知，$Z_t^\alpha \triangleq e^{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}[M]_t}$ 为连续局部鞅，于是存在局部化序列 $\tau_n \uparrow \infty$, 使得 $\forall n \in N, (Z_{t\wedge\tau_n}^\alpha)$ 为 $L^2$ 鞅，从而

$$EZ_{t\wedge\tau_n}^\alpha = 1 \tag{3-22}$$

往证 $\{(Z_{t\wedge\tau_n}^\alpha), n \in N\}$ 一致可积. 为此令

$$Y_t = \exp\left\{\frac{\alpha}{2}[M]_t\right\}$$

则对 $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned} Z_t^\alpha &= (Z_t)^\alpha \left(\exp(\frac{\alpha}{2}[M]_t)\right)^{1-\alpha} \\ &= (Z_t)^\alpha Y_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

对一切有界停时 $\tau \leqslant t, F \in \mathcal{F}_\tau$, 由 Holdër 不等式,

$$\int_F Z_\tau^\alpha \mathrm{d}P \leqslant (EZ_\tau)^\alpha E(I_F Y_\tau)^{1-\alpha} \tag{3-23}$$

由于 $Z_t = Z_t^1$ 为上鞅， $EZ_\tau \leqslant E\,Z_0 = 1$, 以及 $(Y_t)$ 为增过程，故

$$\int_F Z_\tau^\alpha \mathrm{d}P \leqslant \left(\int_F Y_\tau\,\mathrm{d}P\right)^{1-\alpha} \leqslant \left(\int_F Y_t \mathrm{d}P\right)^{1-\alpha}$$

由此可见， $\{(Z_{t\wedge\tau_n}^\alpha), n \in N\}$ 一致可积．于是，由 $(3-22)$ 式得到，

$$EZ_t^\alpha = \lim_{n\to\infty} EZ_{\tau_n\wedge t}^\alpha = 1$$

在 $(3-23)$ 式中取 $\tau = t, F = \Omega$, 并令 $\alpha \to 1$, 最后得到 $EZ_t \geqslant 1$, 而由 $(Z_t)$ 的上鞅性， $EZ_t \leqslant 1$, 因此 $EZ_t = 1$, 可见 $(Z_t), t \in R_+$ 为正的连续鞅． □

当 $M_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s, H \in \Lambda_w^2(S, B)$ 时，条件 $(3-21)$ 式便为

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s\right)\right] < \infty \qquad (3-24)$$

下面形式的 Girsanov 定理更为常用，其证明留给读者．

**3.13Girsanov 定理**　设随机过程 $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t\leqslant T}$ 满足 $P(\int_0^T \gamma_t^2\,\mathrm{d}t < \infty) = 1$, 非负上鞅 $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t\leqslant T}$ 满足

$$Z_t = 1 + \int_0^t \gamma_s\,\mathrm{d}W_s$$

若 $EZ_T(\omega) = 1$, 则

$$W_t^* = W_t - \int_0^t Z_s^+ \gamma_s\,\mathrm{d}s$$

关于测度 $P^*$ 也是 Brownian 运动．其中

$$\mathrm{d}P^* = Z_T(\omega)\,\mathrm{d}P$$

而 $Z_s^+(\omega) = Z_s(\omega)$, 当 $Z_s(\omega) > 0$; 否则为0.

**证明** 参考文献 [2]th.6.4. □

Girsanov 定理实际上给出了一个 Brownian 运动满足一定条件的平移，在一个与原先测度等价的测度下仍是 Brownian 运动.

在结束本节之前我们给出今后将用到的关于由 Brownian 运动产生的 $\sigma$ 代数流 $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leqslant t)$ 连续性的引理.

**3.14引理** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的概率空间，而 $\sigma$ 代数流 $\mathcal{F}_t^B$ 完备，亦即 $\mathcal{F}_0^B$ 包含 $\mathcal{F}$ 中一切 $P-$ 零集，则 $\mathcal{F}_t^B$ 连续，即

$$\mathcal{F}_{t-}^B = \mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_{t+}^B.$$

**证明** 左连续性：由于

$$\mathcal{F}_{t-}^B = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s^B\right), \text{而} \mathcal{F}_t^B = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s^B \bigcup \sigma(B_t)\right)$$

而由 $B_t$ 的连续性， $B_t = \mathrm{l.i.m}_{r\uparrow t, r\in Q} B_r$, 从而

$$\mathcal{F}_t^B \subseteq \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s^B\right)$$

这表明 $\mathcal{F}_{t-}^B = \mathcal{F}_t^B$.

往证右连续性：设 $t > s$, 则由 3.7 定理，

$$E(\mathrm{e}^{izB_t}|\mathcal{F}_s^B) = \mathrm{e}^{izB_s - \frac{z^2}{2}(t-s)}$$

于是对 $0 < \epsilon < t - s$,

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{izB_t}|\mathcal{F}_{s+}^B) &= E\left[E(\mathrm{e}^{izB_t}|\mathcal{F}_{s+\epsilon}^B)|\mathcal{F}_{s+}^B\right] \\ &= E\left[\exp\left\{izB_{s+\epsilon} - \frac{z^2}{2}(t-s-\epsilon)\right\}|\mathcal{F}_{s+}^B\right] \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$, 则得

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{izB_t}|\mathcal{F}_{s+}^B) &= \exp\left\{izB_s - \frac{z^2}{2}(t-s)\right\} \\ &= E(\mathrm{e}^{izB_t}|\mathcal{F}_s^B) \end{aligned}$$

从而，对任意有界可测函数 $f$,

$$E(f(B_t)|\mathcal{F}_s^B) = E(f(B_t)|\mathcal{F}_{s+}^B)$$

现在设 $s < t_1 < t_2$, 且 $f_1(x), f_2(x)$ 均为有界可测函数，则

$$\begin{aligned} & E\left[f_2(B_{t_2})f_1(B_{t_1})|\mathcal{F}_s^B\right] \\ = & E\left[E(f_2(B_{t_2}|B_{t_1})f_1(B_{t_1})|\mathcal{F}_s^B)\right] \\ = & E\left[E(f_2(B_{t_2}|B_{t_1})f_1(B_{t_1})|\mathcal{F}_{s+}^B)\right] \\ = & E\left[f(B_{t_2})f(B_{t_1})|\mathcal{F}_{s+}^B\right] \end{aligned}$$

归纳地可证明

$$E\left[\prod_{j=1}^n f_j(B_{t_j})|\mathcal{F}_s^B\right] = E\left[\prod_{j=1}^n f_j(B_{t_j})|\mathcal{F}_{s+}^B\right]$$

其中 $s < t_1 < \cdots < t_n$, 而 $f_j(x), j = 1, \cdots, n$ 均为有界可测函数. 从而得到对于任意的 $\mathcal{F}_t^B$ 有界的随机变量 $\eta$, 有

$$E(\eta|\mathcal{F}_s^B) = E(\eta|\mathcal{F}_{s+}^B)$$

特别对 $\mathcal{F}_{s+}^B$ 可测且有界的 $\eta$, 有

$$\eta = E(\eta|\mathcal{F}_s^B)$$

这表明 $\mathcal{F}_{s+}^B \subseteq \mathcal{F}_s^B$, 故 $\mathcal{F}_{s+}^B = \mathcal{F}_s^B$. □

## §3.3 股票市场与等价鞅测度

假设在金融市场上我们有两类不同性质的投资，一类是没有风险的投资，比如存款到银行或购买债券获取固定的利率，另一类是有风险的投资，比如买股票或期货. 假定开始投资到银行的资本为 $B_0$, 银行的利率固定为 $r$, 则在时间 $t$, 我们的资本增值为

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

本节 $B_t$ 表示存在银行 (Bank) 的资本，$W_t$ 表示 Brownian 运动. 显然它满足微分方程

$$dB_t = rB_t dt \tag{3-25}$$

为简单计，我们总设 $B_0 = 1$.

假定有风险的投资只有一种，比如某种股票. 假设开始的有风险投资为 $S_0$, 到 $t$ 时刻成为 $S_t$. 所谓风险，表明 $(S_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个随机过程. L.Bachelier 首先发现股票价格的增量正比于 $\sqrt{\Delta t}$. 这就是用 Brownian 运动建模的起因. 然而 Brownian 运动可取负值，而股票价格应为非负值. 事实上，认为股票价格的相对变化率，即 $\dfrac{\Delta S_t}{S_t}$ 正比于 $\sqrt{\Delta t}$ 更为合理，这就提出用几何 Brownian 运动或称为经济 Brownian 运动来描绘股票价格的变化. 下面假定

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\} \quad \sigma > 0, \mu \in R \tag{3-26}$$

考虑这两种投资的模型称为 Black-Scholes 模型 (简记为 (B-S))，以下的讨论就从这里出发. 在 $P$ 测度下，价格过程 $S_t$ 一般不是鞅. 然而下面定义的 **折现价格过程**$\widetilde{S}$ 将在某等价测度下为鞅.

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = S_t e^{-rt} \tag{3-27}$$

现在就来讨论测度的变换．令

$$Z_t^*(\omega)=\exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_t(\omega)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \qquad (3-28)$$

则 $Z_t^*(\omega)>0, P-\text{a.s.}$, 且 $EZ_t^*(\omega)=1$. 因此，由 Girsanov 定理，

$$\mathrm{d}P^*(\omega)=Z_T^*(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) \qquad (3-29)$$

定义了 $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ 上的概率测度， $P^*$ 与 $P$ 是局部等价的，亦即 $\forall t$, $P_t^*\sim P_t$. 今后我们只考虑有限的时间，即设 $t\leqslant T$, 因此对于我们的讨论，不妨假定 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T$. 因为当 $\mu=r$ 时， $Z_t^*(\omega)\equiv 1$. 而

$$W_t^*=W_t+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t \qquad (3-30)$$

关于概率测度 $P^*$ 是标准的 Brownian 运动.

由于在测度 $P^*$ 下 $W^*$ 与在测度 $P$ 下 $W$ 均是 Brownian 运动，因此它们的分布相同，即

$$\mathrm{Law}(W^*|P^*)=\mathrm{Law}(W|P) \qquad (3-31)$$

由 (3－28) 式，经济 Brownian 运动 $S_t=f(t,W_t)$, 由 Ito 公式

$$\mathrm{d}S_t=S_t(\mu\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W_t) \qquad (3-32)$$

今后我们在必要时，将 $S_t$ 记为 $S_t(\mu)$ 以强调它依赖于 $\mu$，那么

$$\begin{aligned}S_t(\mu)&=S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right\}\\&=S_0\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t^*\right\}\end{aligned} \qquad (3-33)$$

由 Ito 公式，可知

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t(\mu) = S_t(\mu)(r\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^*) \ \ P^* - \text{a.s.}, \\ \\ \mathrm{d}S_t(r) = S_t(r)(r\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t) \ \ \ P - \text{a.s..} \end{cases} \tag{3 - 34}$$

这表明

$$\mathrm{Law}(S(\mu)|P^*) = \mathrm{Law}(S(r)|P)$$

这就是说，期望收益率为 $\mu$ 的经济 Brownian 运动的在 $P^*$ 下的分布与期望收益率为 $r$(银行利率) 的经济 Brownian 运动的在 $P$ 下的分布相同．此时，

$$S_t(r) = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \tag{3 - 35}$$

**3.15定理** 设 $T < \infty$ 为常数，则在等价测度 $P^*$ 下，折现价格过程 $(\widetilde{S}_t, \mathcal{F}_t)_{t\leqslant T}$ 为鞅．

**证明** 对折现价格 $\widetilde{S}_t$ 应用 ito 公式，由 (3 − 27) 式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widetilde{S}_t &= -r\mathrm{e}^{-rt}S_t + \mathrm{e}^{-rt}S_t(r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^*) \\ &= \sigma \widetilde{S}_t \mathrm{d}W_t^* \end{aligned}$$

容易验证 $E\int_0^T \widetilde{S}_t^2 \mathrm{d}t < \infty$, 可见 $\widetilde{S}_t$ 为鞅． □

**3.16定义** 称上述的测度 $P^*$ 为 $P$ 的等价鞅测度，也即它与 $P$ 等价，且使得折现价格过程为鞅．

设想某一投资者的初始资本为 $V_0 = x$, 其中一部分 $\theta_0^0 B_0$ 存于银行，一部分 $\theta_0^1 S_0$ 投资于市场．称

$$\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1), t \geqslant 0$$

为 **投资策略**，是指对于每个 $\theta_t^0,\theta_t^1$ 是可料过程，它的直观意义是这两个过程的取值依赖于 $t$ 前市场的信息．其中 $\theta_t^0,\theta_t^1$ 可以取负值，分别表示可以自由地存取或自由地买卖股票．为了数学处理的便利，我们假定 $\theta_t^0,\theta_t^1$ 可取任意的实数值．在 $t$ 时的资本为

$$V_t=\theta_t^0B_t+\theta_t^1S_t \tag{3-36}$$

**3.17定义** 称投资策略 $\theta=(\theta_t)_{t\geqslant 0}$ 为自筹资策略，如果它满足

$$V_t=x+\int_0^t\theta_u^0\mathrm{d}B_u+\int_0^t\theta_u^1\,\mathrm{d}S_u(\mu) \tag{3-37}$$

而且对任意的 $\mu\in R,t>0,P-\text{a.s.}$ 成立

$$\int_0^t|\theta_u^0|\,\mathrm{d}B_u<\infty,\quad \int_0^t(\theta_u^1S_u(\mu))^2\,\mathrm{d}u<\infty \tag{3-38}$$

其中，$\theta_t^0,\theta_t^1$ 为局部有界变差过程，$S_t(\mu)$ 为经济 Brownian 运动．自筹资策略的全体记为 $SF$，相应于投资策略 $\theta$ 的资本过程记为 $V^\theta$．

(3－37) 式等价于

$$\mathrm{d}V_t=\theta_t^0\mathrm{d}B_t+\theta_t^1\mathrm{d}S_t,\quad V_0=x \tag{3-39}$$

对 (3－36) 式用 Ito 公式，我们得到

$$\mathrm{d}V_t=(\theta_t^0\mathrm{d}B_t+\theta_t^1\mathrm{d}S_t)+(B_t\mathrm{d}\theta_t^0+S_t\mathrm{d}\theta_t^1)$$

因此一个投资策略为自筹资当且仅当

$$B_t\mathrm{d}\theta_t^0+S_t\,\mathrm{d}\theta_t^1=0 \tag{3-40}$$

它的直观意义就是既没有消费，也没有增加新的投入．

**3.18定义** 称

$$\widetilde{V}_t^\theta(\mu)=\frac{V_t^\theta(\mu)}{B_t},\ t\geqslant 0$$

为折现资本.

称 $\theta\in SF^\xi$ 是指, $\theta\in SF$, 且存在 $\xi\in\mathcal{F}^+$(非负的 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量), $E^*\xi<\infty$, 使得

$$\widetilde{V}_t^\theta(\mu)\geqslant -E^*(\xi|\mathcal{F}_t), t\geqslant 0, P^*\text{a.s.}. \tag{3-41}$$

并记 $SF^0=SF^+$.

由于 $\widetilde{V}_t^\theta=\theta_t^0+\theta_t^1\widetilde{S}_t, \mathrm{d}\widetilde{V}_t^\theta=\mathrm{d}\theta_t^0+\widetilde{S}_t\mathrm{d}\theta_t^1+\theta_t^1\mathrm{d}\widetilde{S}_t$, 以及 $(3-40)$ 式可知,

$$\theta\in SF \iff \mathrm{d}\widetilde{V}_t^\theta(\mu)=\theta_t^1\mathrm{d}\widetilde{S}_t(\mu) \tag{3-42}$$

**3.19定理** 关于测度 $P^*$, 我们有

(1) 如 $\theta\in SF$, 则 $\widetilde{V}_t^\theta(\mu)$ 是局部平方可积鞅;

(2) 如 $\theta\in SF^\xi$, 则 $\widetilde{V}_t^\theta(\mu)$ 是上鞅;

(3) 如 $\theta\in SF^+$, 则 $\widetilde{V}_t^\theta(\mu)$ 是非负上鞅.

**证明** 由 $(3-42)$ 式,

$$\mathrm{d}\widetilde{V}_t^\theta(\mu)=\theta_t^1\mathrm{d}\widetilde{S}_t(\mu)=\theta_t^1\sigma\widetilde{S}_t(\mu)\,\mathrm{d}W_t \tag{3-43}$$

或等价地

$$\widetilde{V}_t^\theta(\mu)=\widetilde{V}_0^\theta(\mu)+\int_0^t\frac{\sigma\theta_u^1S_u(\mu)}{B_u}\mathrm{d}W_u^*$$

由条件 $(3-38)$ 式可知 $\widetilde{V}_t^\theta$ 是局部鞅, 可适当选取局部化停时列 $(T_n)$, 使得 $(\widetilde{V}_t^\theta)$ 为局部平方可积鞅. 因此 $\forall t>s$,

$$E^*(\widetilde{V}_{t\wedge T_n}^\theta(\mu)|\mathcal{F}_s)=\widetilde{V}_{s\wedge T_n}^\theta(\mu)$$

由条件 $\theta \in SF^{\xi}$, 应用 Fatou 引理得到

$$\begin{aligned}
E^*(\widetilde{V}_t^{\theta}(\mu)|\mathcal{F}_s) &= E^*(\lim_{n\to\infty} \widetilde{V}_{t\wedge T_n}^{\theta}(\mu)|\mathcal{F}_s) \\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E^*(\widetilde{V}_{t\wedge T_n}^{\theta}(\mu)|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{V}_{s\wedge T_n}^{\theta}(\mu) \\
&= \widetilde{V}_s^{\theta}(\mu)
\end{aligned}$$

故 $(\widetilde{V}_t^{\theta}, \mathcal{F}_t)$ 为 $P^*$ 上鞅, (3) 是明显的. □

一个市场有套利是指存在一个有套利的策略, 所谓有套利的策略的直观意义就是可以“无中生有”, 也即一个没有资本的投资者, 可以通过这个策略而获得正的收益. 一个没有套利的市场称为是 **公平市场**.

**3.20定义** 策略 $\theta$ 称为在 $[0,T]$ 上有套利 (arbitrage), 是指它满足

$$V_0^{\theta}(\mu) \leqslant 0, V_T^{\theta}(\mu,\omega) \geqslant 0, P\text{-a.s. } 且 P(V_T^{\theta}(\mu,\omega) > 0) > 0$$

**3.21定理** 设 $\xi \in \mathcal{F}^+, E^*\xi < \infty$, 则对于任意的 $\theta \in SF^{\xi}$, 是没有套利的.

**证明** $\theta \in SF^{\xi}$, 由定理 3.19,$(\widetilde{V}_t^{\theta}(\mu))$ 是上鞅, 如果 $\theta$ 是有套利的策略, 即存在 $A = \{V_T^{\theta}(\mu,\omega) > 0\}$, 使得 $P(A) > 0$. 于是必有 $n \in N$, 使得 $A_n = \left\{V_T^{\theta}(\mu,\omega) > \dfrac{1}{n}\right\}$ 具有正概率, 从而

$$0 \geqslant x \geqslant E^*(\mathrm{e}^{-rT} V_T^{\theta}(\mu)) \geqslant \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-rT} P(A_n) > 0$$

矛盾! □

称策略 $\theta$ 为 **可取** (admissible) 的, 是指 $\forall t \geqslant 0, V_t^{\theta}(\mu,\omega) \geqslant 0$, 这表明在任何时刻资本非负, 也就是不允许投资者同时向银行与

市场借贷. 显然, 有无套利与市场所许可的策略有关, 如果市场许可投资者无限制地同时向银行与市场借贷, 那么这个投资者将成为有无穷资本的人, 他将显然获得套利. 下面主要考虑策略类 SF$^+$, 也即可取的自筹资策略. 可取的自筹资策略是无套利的策略.

3.21 定理可以说成是: 在只有一种股票与一种无风险资产的情形, 市场存在等价鞅测度, 因而在 $SF^{\xi}$ 中不存在有套利的策略, 从而市场"公平". 下面将要揭示等价鞅测度的存在与市场"公平"的关系.

假设市场有 $m$ 种股票 $S^i(t), i=1,2,\cdots,m$(风险资产) 和银行存款或国债投资 $S^0(t)$ (无风险资产), 它们满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}S^i(t) = S^i_t(\mu^i(t)\,\mathrm{d}t + \sigma^i(t)\cdot\mathrm{d}W_t), \ i=1,\cdots,m \\ \mathrm{d}S^0(t) = S^0(t)r(t)\mathrm{d}t, \qquad\qquad S^0_0 = 1 \end{cases} \tag{3-44}$$

其中 $W(t)=(W^1(t),\cdots,W^d(t))^*, d$ 未必等于 $m$, 表明这 $m$ 种股票的价格波动未必彼此无关, 而 $\mu^i(t)$ 是 $m$ 维, $\sigma^i(t)$ 为 $d$ 维向量.

仍然考虑折现价格 $\widetilde{S}^i(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s}S^i(t), i=1,\cdots,m$. 于是

$$\mathrm{d}\widetilde{S}^i(t) = \widetilde{S}^i(t)\left\{(\mu^i(t)-r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma^i(t)\cdot\mathrm{d}W(t)\right\} \tag{3-45}$$

在投资策略 $(\theta_0(t),\theta(t)), \theta(t) = (\theta_1(t),\cdots,\theta_m(t))$ 下, 资本 $V_t \triangleq V^\theta(t) \triangleq \theta^0(t)S^0(t)+\theta(t)\cdot S(t)$, 这里 $S(t)=(S^1(t),\cdots,S^m(t))$. 当

$$V_t = V_0 + \int_0^t \theta^0(u)\,\mathrm{d}S^0(u) + \int_0^t \theta(u)\cdot\mathrm{d}W(u)$$

时, 称 $(\theta_0(t),\theta(t))$ 为自筹资策略.

令 $S_t^{m+1}=\sum_{i=0}^m S_t^i$, 当 $V_t \geqslant -cS_t^{m+1}$, $c>0$, 则称策略 $(\theta^0,\theta)$ 为 **可允许的** (allowable). 显然，可允许策略比可取策略的范围更宽. 同样可证

(1) $(\theta_0,\theta)\in SF \iff \mathrm{d}\widetilde{V}_t^\theta=(\theta^0(t),\theta(t))\cdot\mathrm{d}\widetilde{S}(t)$.

(2) 在等价鞅测度 $Q$ 下, 折现资本 $\widetilde{V}_t^\theta$ 当 $\theta\in SF$ 是局部鞅, 当 $\theta$ 为可允许策略时，它为上鞅.

我们的主要结果是

**3.22定理** 如果存在等价鞅测度，则线性方程

$$\sigma(t)\psi(t)=\mu(t)-r(t),\ \mathrm{d}t\times\mathrm{d}P-\text{a.e.},\text{a.s.}(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega \quad (3-46)$$

有一个解 $\psi\in(\Lambda_w^2(S,B))^d$. 反之，如果

$$E\left[\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T|\sigma^i(t)|^2\mathrm{d}t\}\right]<\infty,1\leqslant i\leqslant m \qquad (3-47\text{a})$$

且方程 (3－46) 式有解 $\psi\in(\Lambda_w^2(S,B))^d$ 满足

$$E\left[\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T|\psi(t)|^2\mathrm{d}t\}\right]<\infty \qquad (3-47\text{b})$$

则满足 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Z(-\psi\cdot W)$ 的测度 $Q$ 为等价鞅测度，其中 $\psi\cdot W\triangleq\int_0^t\psi(s)\cdot\mathrm{d}W_s$.

**证明** 对 $Q\in\mathcal{P}^0$, 令

$$M_t=E\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|\mathcal{F}_t\right)$$

则 $(M_t)$ 是一个 $P$ 鞅. 由 Brownian 运动的鞅表示定理 (5.15)，存

在 $\theta \in (\Lambda_w^2(S,B))^d$, 使得 $\mathrm{d}M_t = \theta(t)\mathrm{d}W_t$. 令 $\psi(t) = -\theta(t)/M_t$, 则

$$\mathrm{d}M_t = -\psi(t)M_t\mathrm{d}W_t$$

故由定理 3.13, $M = Z(-\psi.W)$, 且 $W_t^* = W_t + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s$ 是一个 $Q$ 下的 Brownian 运动. 因为 $Q$ 为等价鞅测度, 即 $\widetilde{S}$ 在测度 $Q$ 下为局部鞅, 故 $(W_t^*)$ 有鞅表示定理, 亦即存在 $\sigma^* \in (\Lambda_w^2(S,B))^{m\times d}$ 使得

$$\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \sigma^*(t)\,\mathrm{d}W_t^* = \sigma^*(t)(\mathrm{d}W_t + \psi(t)\,\mathrm{d}t)$$

根据 Ito 过程 $(\widetilde{S}_t)$ 表示的唯一性 ((3 − 45) 式), 可知 $\sigma^{*i}(t) = \widetilde{S}_t\sigma^i(t), \mathrm{d}t \times \mathrm{d}P - \text{a.e}$, 从而 $\sigma^i(t)\psi(t) = \mu^i(t) - r(t), \mathrm{d}t \times \mathrm{d}P - \text{a.e.}$ 所以 $(\psi(t))$ 是方程 (3 − 46) 式的解.

现在假设 $b$ 满足 (3−47a) 式, $\psi$ 为 (3−46) 式的解, 且 (3−47b) 式成立. 由 Novikov 定理 (3.12), $Z(-\psi.W)$ 是一个 $P$ 鞅. 所以我们可定义概率测度 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = Z(-\psi.W)_T$. 为了证明 $(\widetilde{S}_t)$ 是 $Q$ 鞅, 由命题 3.9, 只要证 $Z(-\psi.W)\widetilde{S}$ 是 $P$ 鞅. 由 (3 − 45) 式, 我们有

$$\widetilde{S}_t^i = \widetilde{S}_0^i \exp\left\{\int_0^t [\sigma^i(s)\mathrm{d}W_s + (\mu^i(s) - r(s))\mathrm{d}s] - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma^i(s)|^2\mathrm{d}s\right\}$$

这里 $\sigma^i(t)$ 表示矩阵 $\sigma(t)$ 的第 $i$ 行向量. 由 (3 − 46) 式,

$$\begin{aligned} &Z(-\psi.W)_t\widetilde{S_t^i} \\ =\ &\widetilde{S_0^i}\exp\left\{\int_0^t(\sigma^i(s) - \psi(s))\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma^i(s) - \psi(s)|^2\mathrm{d}s\right\}\end{aligned}$$

再一次由 Novikov 定理知， $Z(-\psi.W)\widetilde{S^i}$ 是一个 $P$ 鞅. □

注：我们称 (3－46) 式中的 $\psi$ 为市场的风险价格，它是资产价格的期望变化率与资产价格变化的风险总量的比.

期权是现代金融的重要投资手段. 欧式期权是一份远期的合约，合约的持有者可以在合约规定的交割期 $T$, 向证券发行商取得利益 $f_T$, 这个 $f_T$ 与 $T$ 时间前的市场价格有关，因此是一个随机变量. 比如设 $f_T=(S_T-K)^+$, 其中 $S_T$ 是 $T$ 时的股票价格，$K$ 为一个正数，称为交割价. 那么当 $S_T>K$ 时，证券持有者，当然要求兑现合约以取得正的收益，如果当时股票的价格低于 $K$, 证券持有者可以不要求兑现合约. 当然为了得到这份合约，投资者必须向证券商购买这份期权 (到期可以得到权益)，这购买的价格就是期权的定价.

假设这份期权是在 $t$ 时刻签订的，交割价 $K$ 应该满足

$$K=S_t e^{r(T-t)}$$

事实上，如其不然，则必有套利. 例如 $K>S_t e^{r(T-t)}$, 则套利者可先借钱买股票，到了 $T$ 时刻，出卖期权获得 $K$, 还去所借的本息 $S_t e^{r(T-t)}$，而得纯利 $K-S_t e^{r(T-t)}$; 反之，如果 $K<S_t e^{r(T-t)}$, 则套利者可卖空股票，将所得投资于银行而得 $S_t e^{-r(T-t)}$, 同时买期权，到 $T$ 时用 $K$ 买得股票以平仓，则有纯利.

**3.23定义** 设 $T$ 为固定的时间，称随机变量 $f_T\in\mathcal{F}_T^+$ 为**未定权益 (或有权益)**(contingent claim)，称未定权益 $f_T$ 是可达的，如存在一个策略 $\theta\in SF^+$, 使得 $V_T^\theta(\mu)=f_T$, 此时也称策略 $\theta$ **复制了** $f_T$; 称 $\theta\in SF^+$ 是一个 $(\mu,x,f,T)$**欧式保值策略**(hedging

strategy) 是指下面的式子成立:

$$V_0^{\theta}(\mu) = x$$

且

$$V_T^{\theta}(\mu, \omega) \geqslant f_T(\omega), P^*\text{-a.s.}.$$

称保值策略 $\theta^*$ 为 **最小保值策略** ，是指对任意的保值策略 $\theta$ 有

$$V_T^{\theta}(\mu, \omega) \geqslant V_T^{\theta^*}(\mu, \omega), P^*\text{-a.s.}.$$

对于可达的未定权益，最小保值策略就是指满足

$$V_0^{\theta}(\mu) = x$$

且

$$V_T^{\theta}(\mu, \omega) = f_T(\omega), P^*\text{-a.s.}.$$

的策略，也即复制了 $f_T$. 记 $\Theta_T(\mu, x, f, T)$ 为 $SF^+$ 中全体 $(\mu, x, f, T)$ 保值策略. 称

$$C_0(\mu, f_T) = \inf\{x \geqslant 0 : \Theta_T(\mu, x, f, T) \neq \emptyset\} \qquad (3-48)$$

为 **欧式期权价格** (**初始价格**).

期权价格是一个得到随机回报 $V_T^{\theta}(\mu, \omega) \geqslant f_T(\omega)$ 的最小初始投入. 这里强调随机回报是提醒读者、用 $C_0(\mu, f_T)$ 买到期权后，只表明存在一种保值策略 $\theta$, 使得回报基本上超过 $f_T$, 但投资者能否找到 $\theta$, 这是投资的才能，也是风险的体现.

我们关心的问题是根据未定权益如何确定期权的价格，以及如何得到一个保值策略？ 1973 年 Black,Scholes, 以及 Merton 解决了期权定价的问题，从而获得 1997 年度的诺贝尔经济学奖，成为现代数理金融的奠基人. 这个著名公式的介绍我们将在 Feynman-Kac 公式之后进行.

## §3.4 Brownian 运动的弱可料表示

设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 满足通常条件, 则当 $H \in \Lambda^2(\mathcal{S}, B)$, 则随机积分 $M = \int H\mathrm{d}B$ 为连续 $L^2$ 鞅; 若 $H \in \Lambda(\mathcal{S}, B)$, 则 $M \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$, 且平方变差过程为

$$[M]_t = \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s,\ t \in R_+$$

下面是反问题.

**3.24定理** 设 $M$ 为 $d$ 维连续局部鞅, $M_0 = 0$, 且存在 $d \times d$ 矩阵值过程 $H = (H_j^i) \in \mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{S})$, 使得

$$\det[H(t)] \neq 0, \text{a.s..}\forall t \tag{3-49}$$

以及

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t \Phi_{ij}(s)\mathrm{d}s, \text{a.s.}(1 \leqslant i, j \leqslant d) \tag{3-50}$$

这里 $\Phi = HH^*$, 则存在 $d$ 维 Brownian 运动 $W$ 使

$$M_t = \int_0^t H_s \cdot \mathrm{d}W_s,\ \text{a.s.}, t \in R_+ \tag{3-51}$$

这里 “$\cdot$” 表示数量积.

**证明** 采用局部化技术, 不妨假定 $M$ 为连续 $L^2$ 鞅, $H \in \Lambda^2(\mathcal{S}, M)$, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant d$, 令

$$(H^n)^i_j = (H^{-1})^i_j I_{(\max_i (H^{-1})^i_j(t,\omega)\leqslant n)}$$

则 $H^n = ((H^n)^i_j)$ 为 $d\times d$ 矩阵值有界过程，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t E\,\|H^n_s\Phi_s H^{n*}_s - I\|^2\,\mathrm{d}s = 0 \tag{3-52}$$

令

$$W_n(t) \triangleq \int_0^t H^n_s\cdot \mathrm{d}M_s \tag{3-53}$$

则 $W_n\in\mathfrak{M}^2_c$，而

$$[W^i_n, W^j_n]_t = \int_0^t (H^n\Phi H^{n*})^{ij}_s\,\mathrm{d}s \tag{3-54}$$

令

$$W_t = \int_0^t H^{-1}_s\,\mathrm{d}M_s \tag{3-55}$$

则

$$\begin{aligned}&E\|W_n(t)-W(t)\|^2\\ &= E\int_0^t (H^n_s - H^{-1}_s)\Phi(H^n_s - H^{-1}_s)^*\,\mathrm{d}s \to 0\end{aligned}$$

于是 $W_n(t)\xrightarrow{L^2} W(t)$，而由 (3－54) 式得到 $[W^i_n, W^j_n]_t = \delta_{ij}t$，所以 $W_t$ 为 $d$ 维 Brownian 运动，而

$$\int_0^t H_s\cdot \mathrm{d}W_n(s) = \int_0^t H_s H^n_s\cdot \mathrm{d}M_s = \int_0^t I^n_s\,\mathrm{d}M_s \tag{3-56}$$

其中

$$(I^n)_{ij}(t,\omega)=\begin{cases}\delta_{ij}, & \text{当}\max_{ij}|H_{ij}^{-1}(t,\omega)|\leqslant n\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

在 (3 − 56) 式中令 $n\to\infty$, 则得

$$\int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s=M_t$$

□

这个定理中要求找到一个 Brownian 运动，使得连续局部鞅 $M$ 表示为随机积分，我们称之为 Brownian 运动的弱表示性．而定理 6.14 则是强表示性，那里事先给定 Brownian 运动 $B$, 于是要求连续局部鞅必须关于 $\mathcal{F}_t^B$ 适应可测．

在应用中 $H$ 常常是 $m\times d$ 矩阵，因而条件 (3 − 49) 式不满足，为此要将概率空间拓广．

**3.25定理** 设概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ 满足通常条件， $M$ 为 $d$ 维连续局部鞅， $M_0=0$, 且存在 $m\times d$ 矩阵值过程 $H=(H_j^i)\in\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}(S)$, 使得

$$\det[H(t)]\neq 0,\ \text{a.s.}.\forall t \tag{3 − 57}$$

以及

$$[M^i,M^j]_t=\int_0^t\Phi_{ij}(s)\mathrm{d}s,\text{a.s.}(1\leqslant i,j\leqslant d) \tag{3 − 58}$$

这里 $\varPhi=HH^*$, 则存在 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},(\tilde{\mathcal{F}}_t),\tilde{P})$ 及其上的 $d$ 维 Brownian 运动 $W$,

$$M_t = \int_0^t H_s \cdot \mathrm{d}W_s,\ \text{a.s.}, t \in R_+ \qquad (3-59)$$

这里 $\cdot$ 表示数量积.

定理的证明可参考文献 [4]th.16.4, 下面只叙述概率空间拓广的概念.

**3.26定义** 称概率空间 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{P})$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 的拓广，是指存在映射

$$\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$$

为 $\widetilde{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$ 可测，且满足

(1) $\widetilde{\mathcal{F}}_t \supseteq \pi^{-1}(\mathcal{F}_t), \forall t \in R_+$;

(2) $P = \widetilde{P} \circ \pi^{-1}$;

(3) $\forall \xi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), t \in R_+$, 有

$$\widetilde{E}\,(\xi(\pi\omega)|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = E\,(\xi|\mathcal{F}_t)(\pi\widetilde{\omega}) \quad \text{a.s.}\widetilde{P}$$

其中 $\widetilde{E}$ 表示关于 $\widetilde{P}$ 的期望.

如果存在两个带 $\sigma$ 代数流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 以及 $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P')$ 令 $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times \mathcal{F}', \widetilde{P} = P \times P', \widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \times \mathcal{F}'_t$, 则可验证 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{P})$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 的拓广. 而且, 若 $\tau$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 停时，则由 $\widetilde{\tau}(\widetilde{\omega}) = \tau(\pi\omega)$ 定义的 $\widetilde{\tau}$ 为 $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ 停时. 若 $M$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 鞅，则由 $\widetilde{M}_t(\widetilde{\omega}) \triangleq M_t(\pi\widetilde{\omega})$ 定义的过程 $\widetilde{M}$ 为 $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ 鞅. 若 $M, N$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 连续局部鞅，则 $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ 为 $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ 连续局部鞅，并且 $\forall t \in R_+$,

$$[\widetilde{M}., \widetilde{N}]_t(\widetilde{\omega}) = [M, N]_t(\pi\widetilde{\omega}).$$

这些事实均可直接由拓广的定义得出.

## §3.5 局部时与 Tanaka 公式

Ito 公式要求函数 $f \in C^2$, 但在许多应用问题中往往要考虑并不光滑的函数, 如考虑在原点具反射壁的一维 Brownian 运动 $|W_t|$. 为了应用 Ito 公式, 我们需对 $f(x) = |x|$, 考虑 $\mathrm{d}f(W_t)$. 一个很自然的想法是利用广义导数的概念推广 Ito 公式.

广义导数的概念与性质可参考文献 [8], 下面是它的简述.

设 $C_0^\infty(R)$ 为 $R$ 上具紧支集无穷次连续可微函数的全体. 属于 $C_0^\infty(R)$ 的一个典型例子是

$$f(x) = \begin{cases} \exp((|x|^2 - 1)^{-1}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

其中 $|x| = |(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_j^2)^{1/2}$. 对于 $f_n, f \in C_0^\infty(R)$, 我们定义一种收敛性: $f_n \to f \iff$ 它们的支集含于某个公共的紧集 $K$ 中, 而且 $f_n$, 以及它的各阶导数均在 $K$ 上一致收敛于 $f$ 及其各阶导数 . $C_0^\infty(R)$ 赋以与此收敛性相应的拓扑, 构成一个线性拓扑空间 $D(R)$. 定义在 $D(R)$ 上的连续线性泛函, 称为是**广义函数**, 广义函数的全体记为 $D^*(R)$.

**例 1** 设 $f$ 为 $R$ 上 **局部可积** 函数, 即在任一有限区间上 Lebe-sgue 可积, 令

$$T_f(\phi) \triangleq \int_R f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,\ \phi \in D(R)$$

则 $T_f \in D^*(R)$. 因此每个局部可积函数都可看作是一个广义函数.

**例 2** 设 $\mu$ 为 $R$ 上的 Radon 测度 (即在任一有界 Borel 集上取有限值)，令

$$T_\mu(\phi) \triangleq \int_R \phi(x)\mu(\mathrm{d}x),\ \phi \in D(R)$$

则 $T_\mu \in D^*(R)$. 因此，每个 Radon 测度都可以看作是一个广义函数. 特别如取 $\mu$ 为集中于原点的单点测度，其值为 1, 则它也是广义函数，这就是 $\delta$ 函数.

称两个广义函数 $T_f, T_g$ 相等，是指 $\forall\phi \in D(R)$, 有 $T_f(\phi) = T_g(\phi)$. 可以证明这当且仅当 $f(x) = g(x)$ a.e.. 在这样的观点下，局部可积函数等同于以它为密度函数的 Radon 测度.

对广义函数 $T \in D^*(R)$, 则

$$S(\phi) \triangleq -T(\phi') \tag{3-60}$$

为 $D(R)$ 上的连续线性泛函，因此也是一个广义函数，我们称它为广义函数 $T$ 的广义导数，记为 $T'$. 同样地，称

$$T^{(n)}(\phi) = (-1)^n T(\phi^{(n)}), \forall n \in N_0, \phi \in D(R) \tag{3-61}$$

为广义函数 $T$ 的 $n$ 阶广义导数. 由此可知任一广义函数具任意阶的广义导数. 我们要指出上述广义导数的概念是通常导数概念的推广. 事实上，如函数 $f$ 连续可微，则由分部积分，

$$\begin{aligned} T_f'(\phi) &= -T_f(\phi') = -\int_R f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = T_{f'}(\phi) \end{aligned}$$

这表明，如果 $f$ 为通常的连续可微函数，将 $f$ 看成为广义函数 $T_f$ 时的广义导数就是 $f'$ 所指的广义函数.

**例 3** 设 $f$ 为 $R$ 上凸函数，则 $f$ 连续，因而局部可积. 可以证明[1] $\forall x$, 其左导数 $D^-f(x)$ 及右导数 $D^+f(x)$ 均存在，并且除开一个可数集外，左右导数相等，即通常意义下的导数存在. 如果令

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[D^-f(x) + D^+f(x)\right] \qquad (3-62)$$

则 $f'(x)$ 为增函数，且有

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由分部积分公式，$\forall \phi \in D(R)$,

$$\begin{aligned} T_f''(\phi) &= T_f(\phi'') = \int_R f(x)\phi''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_R f'(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_R \phi(x)\,\mathrm{d}f'(x) = T_{\mathrm{d}f'}(\phi) \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}f'$ 为由增函数 $f'$ 产生的 Lebesgue-Stieltjies 测度. 因此 $T_f'' = T_{\mathrm{d}f'}$.

例如，$f(x) = |x|$ 作为一凸函数，由 (3 − 62) 式，其一阶的广义导数为

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

其二阶广义导数为由 $\mathrm{sgn}(x)$ 产生的 L-S 测度，即集中于原点的单点测度，也即广义函数 $2\delta$.

[1] 参考文献 [12]

一般地，凸函数 $f_a(x)=|x-a|$ 的广义导数为 $\mathrm{sgn}(x-a)$，而二阶广义导数为

$$2\delta_a(x)=\begin{cases}2, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$$

现在讨论对一般凸函数的 Ito 公式.

**3.27定理** 设 $X$ 为连续半鞅，$X=X_0+M+V$ 为其典型分解，$f$ 为凸函数，$f'\triangleq\dfrac{1}{2}(D^-f+D^+f)$，则 $f(X)$ 为连续半鞅，且存在唯一连续增过程 $U$，使得 $\forall t\in R_+$，有

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}s+U_t \tag{3-63}$$

**证明** 令 $\tau_n=\inf\{t:|X_t|\geqslant n\}$，利用停时技术不妨假定 $X$ 有界. 令

$$\rho(x)=\begin{cases}c\exp\{-(1-x^2)^{-1}\}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

其中 $c$ 为常数，使得 $\int_{-1}^1\rho(x)\,\mathrm{d}x=1.\forall n\in N$，令

$$\rho_n(x)\triangleq n\rho(nx)$$

则 $\rho_n\in D(R)$ 为非负偶函数，其支集为 $\left[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right]$，且 $\int_R\rho_n(x)\mathrm{d}x=1$. 记

$$\begin{aligned}f_n(x)\triangleq(f*\rho_n)(x)&=\int_R f(y)\rho_n(x-y)\,\mathrm{d}y\\ &=\int_R f(x-y)\rho_n(y)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3-64}$$

显然， $f_n$ 为凸函数， $f_n \in C^\infty(R)$, 且当 $n \to 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant \int_{(|y|\leqslant 1/n)} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sup_{|y|\leqslant 1/n} |f(x-y) - f(x)| \to 0
\end{aligned}
$$

于是 $f_n$ 在有限区间上一致收敛于 $f$. 对 $(3-64)$ 式求微分，得

$$
\begin{aligned}
f_n'(x) &= \int_R f'(x-y)\rho_n(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_R f'(y)\rho_n(x-y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

凸函数 $f$ 的导数 $f'$ 定义为左右导数的平均值， $\rho_n$ 为偶函数，故

$$
\begin{aligned}
&|f_n'(x) - f'(x)| \\
&\leqslant \sup\nolimits_{|x-y|\leqslant 1/n} |f'(x-y) - f'(x)| \to 0, \forall x \in R
\end{aligned}
$$

对 $f_n$ 应用 Ito 公式， $\forall t \in R_+$, 有

$$
\begin{aligned}
f_n(X_t) &= f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_s)\mathrm{d}X_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)\,\mathrm{d}[M]_s
\end{aligned}
\qquad (3-65)
$$

记右边最后一项为 $U_t^{(n)}$, 因 $f$ 凸， $f'' \geqslant 0$, 故 $(U_t^{(n)})$ 为连续增过程. 由假定 $X$ 有界, 而 $f_n'$ 收敛于 $f'$, 故 $\{f_n'(X)\}$ 一致有界. 因此, 随机积分 $\int f_n'(X)\,\mathrm{d}X = \int f_n'(X)\,\mathrm{d}M + \int f_n'(X)\,\mathrm{d}V$ 依概率在有限区间上一致收敛于 $\int f_n'(X)\mathrm{d}X = \int f_n'(X)\,\mathrm{d}M + \int f_n'(X)\,\mathrm{d}V$.

这样 $U^{(n)}$ 也依概率在有限区间上一致收敛于某过程 $U$, 显然 $U$ 为连续增过程. □

**3.28定理** 考虑凸函数 $f_a(x) = |x-a|, a \in R$, 则有连续增过程 $L^a = \{L_t^a, t \in R_+\}$, 使得下面的 Tanaka 公式成立:

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\,\mathrm{d}X_s + L_t^a \qquad (3-66)$$

并称这里的连续增过程 $L^a$ 为 $X$ 在 $a$ 的局部时.

特别当 $X = W$ 为 Brownian 运动, 则有

$$|W_t - a| = |W_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s - a)\,\mathrm{d}W_s$$

$$+ \int_0^t \delta_a(W_s)\,\mathrm{d}s \qquad (3-67)$$

其最后一项

$$L_t^a \triangleq \mathrm{l.i.m.}_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t I_{(a-\epsilon,a+\epsilon)}(W_s)\,\mathrm{d}s$$

$$= \mathrm{l.i.m.}_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}\lambda\{s \in [0,t] : W_s \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\} \qquad (3-68)$$

称为是 Brownian 运动在 $a$ 点的局部时, 即 Brownian 运动的轨道在 $t$ 时刻前在 $a$ 点邻域逗留时间的密度.

可以证明

**3.29命题** 设 $X$ 为连续半鞅, $L^a$ 为 $X$ 在 $a$ 处的局部时, 则有

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}L_t^a \qquad (3-69)$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t I_{(-\infty,a)}(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}L_t^a \quad (3-70)$$

如果 $X$ 为有限变差过程，则因为 $[M]=0$, 故局部时为 0.

**3.30定理** 设 $X$ 为连续半鞅，由局部时 $L_t^a$ 产生的 Lebesgue-Stieltjie 测度 $\mathrm{d}L_t^a(\omega)$ 只在集合 $\{t: X_t(\omega)=a\}$ 上有负荷.

**证明** 往证对每个 $T>0, \mathrm{d}L_t^a(\omega)$ 在集合 $\{t\leqslant T: X_t(\omega)\neq a\}$ 上无负荷. 设停时 $\sigma,\tau$ 满足 : $0\leqslant\sigma\leqslant\tau\leqslant T$, 而且 $(\sigma,\tau)\subset\{(t,\omega): X(t,\omega)<a\}$. 由 $L^a$ 及 $X$ 的连续性，在 (3 − 69) 式中分别以 $\tau,\sigma$ 代替 $t$, 然后相减得

$$\begin{aligned}&(X_\tau - a)^+ - (X_\sigma - a)^+\\ &= \int_\sigma^\tau I_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}(L_\tau^a - L_\sigma^a)\end{aligned}$$

因为在 $[\tau,\sigma]$ 上， $X\leqslant a$, 故上式左边及右边第一项为 0, 所以 $L_\tau^a = L_\sigma^a$.

对任意的有理数 $r\in Q\cap[0,T]$, 令 $\sigma_r \triangleq r|_{(X_r<a)}, \tau_r \triangleq \inf\{t>\sigma_r: X_r\geqslant a\}\wedge T$, 则 $(\sigma_r,\tau_r)\subset\{X<a\}$, 而

$$\bigcup_{r\in\cap[0,T]}(\sigma_r,\tau_r) = \{t\leqslant T: X(t,\omega)<a\}$$

故对 a.s. $\omega, \mathrm{d}L_t^a(\omega)$ 在 $\{t\leqslant T: X(t,\omega)<a\}$ 上无负荷，同理可证它在 $\{t\leqslant T: X(t,\omega)>a\}$ 上无负荷. □

现在将 Ito 公式推广到 $f$ 为凸函数情形.

**3.31定理** 设 $X$ 为一维连续半鞅， $f$ 为两个凸函数之差，$f' = \frac{1}{2}(D^-f + D^+f), \mu$ 为 $f$ 的二阶广义导数 (即 $R$ 上的 Radon 测度)，则

1) 存在 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(R)$ 可测函数 $L_t^a(\omega)$, 使 $\forall a\in R, L^a$ 为 $X$ 在 $a$ 点的局部时;

2) $\forall t\in R_+$, 有

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_R L_t^a\,\mu(\mathrm{d}a) \qquad (3-71)$$

**证明** 当 $f$ 为线性函数时, 由通常的 Ito 公式, $(3-70)$ 式成立, 此时 $\mu\equiv 0$. 现假定 $\mu$ 为非负有界测度, 令

$$g(x)=\frac{1}{2}\int_R |x-a|\,\mu(\mathrm{d}a) \qquad (3-72)$$

则其二阶广义导数为

$$\begin{aligned}
T_g''(\phi) &= T_g(\phi'')=\int_R g(x)\phi''(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_R\left(\int_R |x-a|\phi''(x)\,\mathrm{d}x\right)\mu(\mathrm{d}a)\\
&=-\frac{1}{2}\int_R\left(\int_R \mathrm{sgn}(|x-a|)\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right)\mu(\mathrm{d}a)\\
&=\int_R \phi(a)\mu(\mathrm{d}a)=T_\mu(\phi),\phi\in D(R)
\end{aligned}$$

注意到 $f$ 之二阶广义导数为 $\mu$, 故 $f-g$ 之二阶导数为 0, 两者只差一个线性函数, 而对于线性函数 $(3-71)$ 式是成立的, 所以只要对 $g(x)$ 证明本定理.

$$g'(x)=\frac{1}{2}\int_R \mathrm{sgn}(x-a)\mu(\mathrm{d}a) \qquad (3-73)$$

令

$$Z_t \triangleq g(X_t) - g(X_0),$$

$$Z_t^a \triangleq |X_t - a| - |X_0 - a|, a \in R, t \in R_+$$

由 $X$ 的连续性，作为 $(\omega, t, a)$ 的函数 $Z_t^a(\omega)$ 是 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(R)$ 可测，且由 $(3-72)$ 式，有

$$Z_t = \frac{1}{2}\int_R Z_t^a \, \mu(\mathrm{d}a), t \in R_+ \qquad (3-74)$$

令

$$H_t^a(\omega) \triangleq \mathrm{sgn}(X_t(\omega) - a)$$

它是 $\mathcal{P} \times R$ 可测的，且由 $\mu$ 的有界性可知

$$H_t^\mu(\omega) \triangleq \int_R H_t^a(\omega)\mu(\mathrm{d}a)$$

为有界可料过程，由 $(3-73)$ 式可知

$$H_t^\mu = 2g'(X_t) \qquad (3-75)$$

记

$$Y_t^a \triangleq \int_0^t H_s^d \mathrm{d}X_s$$

则它为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(R)$ 可测，且

$$Y_t^\mu \triangleq \int_R Y_t^a \, \mu(\mathrm{d}a) = \int_0^t H_s^\mu \, \mathrm{d}X_s \qquad (3-76)$$

令

$$L^a \triangleq Z^a - Y^a = |X_t - a| - |X_0 - a| \\ - \int_0^t \mathrm{sgn}(X_t - a)\,\mathrm{d}X_s$$

由 Tanaka 公式知 $L^a$ 为 $X$ 在 $a$ 点的局部时，且作为 $(\omega, t, a)$ 的函数，它为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(R)$ 可测，而由 $(3-74)$ 式，$(3-75)$ 式，$(3-76)$ 式得到

$$\begin{aligned} \int_R L_t^a \mu(\mathrm{d}a) &= \int_R Z_t^a \mu(\mathrm{d}a) - \int_R Y_t^a \mu(\mathrm{d}a) = 2Z_t - Y_t^\mu \\ &= 2f(X_t) - 2f(X_0) - 2\int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s \end{aligned}$$

$(3-71)$ 式得证.

对于一般的凸函数 $f$ 及 $n \in N$, 令

$$f_n(x) \triangleq \begin{cases} f(n) + D^+ f(n)(x - n), & x > n, \\ f(x), & -n \leqslant x \leqslant n, \\ f(-n) + D^- f(-n)(x + n) & x < -n \end{cases}$$

则 $f_n$ 为凸函数，其二阶广义导数为 $\mu_n(\mathrm{d}a) = I_{[-n,n]}(a)\mu(\mathrm{d}a)$ 为非负有界测度．令

$$\tau_n \triangleq \inf\{t : |X_t| \geqslant n\}$$

则在 $[0, \tau_n)$ 上有 $f_n(X) = f(X)$, 而由定理 3.30, 当 $a \notin [-n, n]$ 时，$L_{\tau_n}^a = 0$, 因此当 $t \leqslant \tau_n$ 时有

$$\int_R L_t^a \mu_n(\mathrm{d}a) = \int_R L_t^a \mu(\mathrm{d}a)$$

可见 (3 − 70) 式在每个随机区间 $[0,\tau_n)$ 成立，而 $\tau_n\uparrow\infty$, 定理得证. □

**3.32推论** 设 $M\in\mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}$ $L^a$ 为 $a$ 点局部时， $g$ 为有界 Borel 可测函数，则 $\forall t\in R_+$, 有

$$\int_R L_t^a g(a)\,\mathrm{d}a=\int_0^t g(M_s)\,\mathrm{d}[M]_s \tag{3-77}$$

**证明** 将 (3 − 71) 式与 Ito 公式比较，可知当凸函数 $f\in C^2(R)$ ,

$$\int_R L_t^a f''(a)\,\mathrm{d}a=\int_0^t f''(M_s)\,\mathrm{d}[M]_s$$

由单调类定理，可知它对一切有界 Borel 可测函数成立. □

特别，取 $g(x)=I_B(x), B$ 为 Borel 集，则得

$$\int L_t^a\mathrm{d}a=\int_0^t I_B(M_s)\mathrm{d}[M_s]$$

对于 Brownian 运动 $W$, 则上式成为

$$\int_B L_t^a\mathrm{d}a=\int_0^t I_B(W_s)\mathrm{d}s$$

正表明 Brownian 运动局部时就是 Brownian 运动轨道在集合 $B$ 上逗留的密度.

Brownian 运动局部时有许多有用的性质，例如它关于 $(t,a)$ 二元连续，且 $\{L_t^a:a\in R\}$ 为一以 $a$ 为时间参数的马氏过程 (见文献 [14]). 应用局部时研究具有反射壁的 Brownian 运动可参考文献 [5].

# 习题与问题三

3.1 利用 Ito 公式证明 $X_t=\exp\{B_t-t/2\}$ 满足下面的方程:

$$X_t=1+\int_0^t X_s\mathrm{d}B_s$$

其中 $B$ 为 Brownian 运动.

3.2 设 $X$ 为 $d$ 维 Brownian 运动 ,$Q$ 维 $d\times d$ 正交矩阵值可料过程 ,$M_t=\int_0^t Q_s\cdot\mathrm{d}M_s,t\in R_+$, 证明 $M$ 为 $d$ 维 Brownian 运动.

3.3 设 $B$ 为 $d$ 维 Brownian 运动, $\tau$ 为有限停时, 令 $\widetilde{B}=B_{\tau+t}-B_\tau,\widetilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_{\tau+t}$, 则 $(\widetilde{B}_t,\widetilde{\mathcal{F}}_t),t\in R_+$ 为 $d$ 维 Brownian 运动, 且和 $\widetilde{\mathcal{F}}_0=\mathcal{F}_\tau$ 独立. (此即 Brownian 运动的强马氏性.)

3.4 试证 Burkholder-Davis-Gundy 不等式: 对一切 $p>0$, 存在常数 $C_p,D_p$, 使

$$C_pE\left[[M]_\tau^{p/2}\right]\leqslant E\left[(M_\tau^*)^p\right]\leqslant D_pE\left[[M]_\tau^{p/2}\right]$$

对一切 $M\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$ 及停时 $\tau$ 成立.

3.5 参考文献 [4] 定理 14.9, 研究随机积分中时间的变换.

3.6 证明在定理 3.10 的条件下, 若存在 $\delta>0$, 使得

$$\sup_{t\leqslant T}E\exp(\delta H_t^2)<\infty,$$

则 $E(Z_T(H))=1$.

3.7 参考文献 [2]6.4 证明定理 3.13.

3.8 在定理 3.12 中, Novikov 条件可用

$$E\left(\exp[\frac{1}{2}\int_0^t H(s)\,\mathrm{d}B_s]\right)<\infty$$

来代替 (见文献 [13]).

3.9 用 Ito 公式证明下面过程是鞅:

1) $X_t = e^{t/2}\cos B_t$;

2) $X_t = (B_t + t)\exp(-B_t - t/2)$.

3.10 设 $dX_t = a(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$ 为 $R^n$ 上的 Ito 过程, $\forall t \geqslant 0$, 满足

$$E\int_0^t |a(s,\omega)|\,ds + E\int_0^t |vv'(s),\omega|\,ds < \infty$$

如果 $X_t$ 为 $\mathcal{F}_t^B$ 鞅, 则 $a(t,\omega) = 0, \forall(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$-a.s..

提示: 往证 $E\left(\int_s^t a(r,\omega)dr|\mathcal{F}_s^B\right) = 0, \forall t \geqslant s$, 关于 $t$ 微分, 往证 $E\left[a(t,\omega)|\mathcal{F}_s^B\right] = 0, \forall t > s$, 令 $s \uparrow t$.

3.11 设 3.10 中 ,$b = 1, a$ 有界, 令 $Y_t = X_t M_t$, 其中

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t a(s,\omega)\,dB_s - \frac{1}{2}a^2(s,\omega)\,ds\right)$$

其中 $(B_t, \mathcal{F}_t)$ 为 Brownian 运动, 则 $Y_t$ 是 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

3.12 对实数 $\mu, b$ 令

$$T_b^\mu = \inf\{y \geqslant 0 : \mu t + B_t = b\}, \inf\phi = 0$$

其中 $(B_t)$ 为标准 Brownian 运动, 用 Girsanov 定理证明: $\forall\alpha, t > 0$, 有

$$E\left(e^{-\alpha(T_b^\mu \wedge t)}\right) = E\left[e^{-\alpha(T_b^0 \wedge t)}\right]\exp\left(\mu B_{T_b^0 \wedge t} - \frac{\mu^2}{2}T_b^0 \wedge t\right)$$

# 第四章　随机微分方程

## §4.1　随机微分方程的强解

正如我们把随机微分看成是随机积分的另一种表达，这里所讨论的随机微分方程其实是随机积分方程的另一种表达. 我们限于 $t \leqslant T$, 其中 $T$ 为有限常数. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)), t \leqslant T$ 为满足通常条件的滤基.

记 $C^T$ 为定义在 $[0,T]$ 上 $m$ 维连续函数全体， $\mathcal{B}^T$ 为由 $C^T$ 中柱集生成的 $\sigma$ 代数， $\mathcal{B}_t = \sigma(x \in C : x_s, s \leqslant t)$.

今后我们对 $x \in R^m, \gamma = (\gamma_{ij}) \in M^{m,d}$, 记

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2,\ \|\gamma\gamma^T\| = \mathrm{tr}(\gamma\gamma^T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d \gamma_{ij}^2$$

随机积分方程最一般的形式是：

$$X_t = \eta + \int_0^t a(s,X)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s,X)\,\mathrm{d}B_s \qquad (4-1\mathrm{a})$$

其中 $B$ 为 $d$ 维的 $(\mathcal{F}_t)$ Brownian 运动，其各分量相互独立，而

$$a : R_+ \times R^m \to R^m$$

为 $(\mathcal{B}_t)$ 适应的可测泛函，

$$b : R_+ \times R^m \to M^{m,d}$$

为 Borel 可测映射，其中 $M^{m,d}$ 为 $m\times d$ 矩阵全体．满足：

$$\forall t, \int_0^t |a(s,x)|\,\mathrm{d}s<\infty, \int_0^t b^2(s,x)\,\mathrm{d}s<\infty.$$

为叙述方便，我们分别记 $a\in\mathcal{L}_{\rm loc}, b\in\mathcal{L}^2_{\rm loc}$.

如果对每个 $s, a(s,x), b(s,x)$ 只依赖于轨道在 $s$ 时的值，此时 $a,b$ 就是定义在 $R_+\times R^m$ 上的 Borel 可测函数，则称下述随机积分方程是 Markov 型的，

$$X_t=\eta+\int_0^t a(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}B_s \qquad (4-2\mathrm{a})$$

对于给定的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t))$, 以及 Brownian 运动 $B=(B_t,\mathcal{F}_t), t\leqslant T$, 如果存在随机过程 $(X_t,\mathcal{F}_t)$ 满足方程 $(4-1\mathrm{a})$ 或 $(4-2\mathrm{a})$, 则称它为方程 $(4-1\mathrm{a})$ 或 $(4-2\mathrm{a})$ 的 **强解**，强解的唯一性是指两个解过程无区别.

如对方程 $(4-1\mathrm{a})$ 、$(4-2\mathrm{a})$, 能构造概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t))$, 和 Brownian 运动 $B=(B_t)$, 以及连续过程 $X=(X_t)$ 使得 $(4-1\mathrm{a})$ 或 $(4-2\mathrm{a})$ 成立，而且 $P(X_0\leqslant x)=P(\eta\leqslant x)$, 则称 $X$ 为方程 $(4-1\mathrm{a})$ 或 $(4-2\mathrm{a})$ 的 **弱解**，弱解的唯一性是指两个解过程具有相同的分布.

我们认定：随机积分方程 $(4-1\mathrm{a})$ 与随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=a(t,X)\,\mathrm{d}t+b(t,X)\,\mathrm{d}B_t,\\ X_0=\eta\end{cases} \qquad (4-1\mathrm{b})$$

是等价的；随机积分方程 $(4-2\mathrm{a})$ 与随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=a(t,X_t)\,\mathrm{d}t+b(t,X_t)\,\mathrm{d}B_t,\\ X_0=\eta\end{cases} \qquad (4-2\mathrm{b})$$

是等价的，其中 $\eta \in \mathcal{F}_0$. 也即随机微分方程的强解或弱解就是相应的随机积分方程的强解或弱解.

关于强解存在、唯一性我们有下面的定理.

**4.1定理** 如果 $a$ 与 $b$ 满足关于 $x$ 的一致 Lipschtiz 条件：

$$|a(t,x)-a(t,y)|+\|b(t,x)-b(t,y)\|\leqslant L|x-y| \tag{4-3}$$

以及关于 $x$ 的线性增长条件：

$$|a(t,x)|+\|b(t,x)\|\leqslant L(1+|x|) \tag{4-4}$$

其中 $x,y\in R^m, L$ 为常数，则随机微分方程 (4 − 2b) 有唯一的强解，它关于 $\mathcal{F}_t^{\eta,B}=\sigma(\eta,B_s,s\leqslant t)$ 可测. 而且当 $E|\eta|^2<\infty$ 时，$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t|^2<\infty$. 如果，对某个 $k, E|\eta|^{2k}<\infty$, 则

$$E|X_t^{2k}|\leqslant(1+E|\eta|^{2k})\mathrm{e}^{C^*t} \tag{4-5}$$

$$E\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t|^{2k}\}\leqslant C(1+E|\eta|^{2k}) \tag{4-6}$$

式中常数 $C, C^*$ 只依赖于 $L,T,k$.

为简单起见，下面对于 $m=1$ 情形给出定理的证明.

解的唯一性证明用到 **Growall型不等式**：

**4.2引理** 设连续函数 $g(t)$ 满足

$$0\leqslant g(t)\leqslant\alpha(t)+\beta\int_0^t g(s)\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\text{a.e.}$$

其中 $\alpha(t)$ 可积， $\beta\geqslant 0$, 则

$$g(t)\leqslant\alpha(t)+\beta\int_0^t\alpha(s)\mathrm{e}^{\beta(t-s)}\,\mathrm{d}s,\text{a.e.}$$

**证明** 记 $Z(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s, h(t)=g(t)-\alpha(t)-\beta Z(t)\leqslant 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}=g(t)=h(t)+\alpha(t)+\beta Z(t), Z(0)=0$$

非齐次微分方程的解

$$Z(t)=\int_0^t (h(s)+\alpha(s))\mathrm{e}^{\beta(t-s)}\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t \alpha(s)\mathrm{e}^{\beta(t-s)}\mathrm{d}s$$

故

$$g(t)\leqslant\alpha(t)+\beta Z(t)\leqslant\alpha(t)+\beta\int_0^t \alpha(s)\mathrm{e}^{\beta(t-s)}\mathrm{d}s$$

□

**强解唯一性的证明**(一维情形)：设 $X,\widetilde{X}$ 为 (4–2b) 式的两个解，则有

$$\begin{aligned}X_t-\widetilde{X}_t &= \int_0^t a(s,X_s)-a(s,\widetilde{X}_s)\mathrm{d}s\\ &+\int_0^t b(s,X_s)-b(s,\widetilde{X}_s)\mathrm{d}B_s\end{aligned}$$

利用 Holder 不等式， Ito 同构及 Lipschitz 条件可得

$$\begin{aligned}&E|X_t-\widetilde{X}_t|^2\\ \leqslant\ &2E\left|\int_0^t (a(s,X_s)-a(s,\widetilde{X}_s))\mathrm{d}s\right|^2\\ &+2E\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,\widetilde{X}_s))\mathrm{d}B_s\right|^2\\ \leqslant\ &2L^2(1+T)\int_0^t E\,|X_s-\widetilde{X}_s|^2\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由 Growall 不等式得

$$E|X_t - \widetilde{X}_t|^2 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

因而 $X$ 与 $\widetilde{X}$ 无区别.

强解的存在性则可利用逐次逼近法或不动点原理得到. 令

$$Y_t^0 = \eta$$

$$Y_t^{k+1} = \eta + \int_0^t a(s, Y_s^k)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, Y_s^k)\mathrm{d}B_s \qquad (**)$$

则由 Lipshitz 条件,

$$E|Y_t^{k+1} - Y_t^k|^2 \leqslant 2L^2(1+T)\int_0^t E|Y_s^k - Y_s^{k-1}|\mathrm{d}s \qquad (4-7)$$

而由线性增长条件

$$E|Y_t^1 - Y_t^0|^2 \leqslant (2L^2t^2 + 2L^2t)(1 + E|\eta|^2) \leqslant At \qquad (4-8)$$

其中 $A = 2L^2T(1+T)(1+E|\eta|^2)$. 由 $(4-7)$ 式、$(4-8)$ 式, 可归纳地证明

$$E|Y_t^{k+1} - Y_t^k|^2 \leqslant \frac{(At)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (4-9)$$

而且

$$E\int_0^T (Y^k(t))^2\mathrm{d}t < \infty \qquad (4-10)$$

由 (**) 式，以及 (4－3)、(4－4) 式可得到

$$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{k+1}-Y_t^k|^2\leqslant 2L^2T\int_0^T E|Y_s^k-Y^{k-1}|^2\mathrm{d}s$$

$$+8L^2\int_0^t|Y_s^k-Y_s^{k-1}|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C\frac{(AT)^k}{k!}$$

这里 $C=2L^2T^2+8L^2T$，因此由鞅的极大不等式及切贝雪夫不等式，

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{k+1}-Y_t^k|>\frac{1}{2^k}\right)\leqslant 2^kC\frac{(AT)^k}{k!}$$

由 Borel-Cattelli 引理

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{k+1}-Y_t^k|>\frac{1}{2^k},\mathrm{i.o.}\right\}=0$$

于是，对几乎所有的 $\omega$，存在正整数 $k_0=k_0(\omega)$，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{k+1}-Y_t^k|\leqslant\frac{1}{2^k},\quad k\geqslant k_0.$$

这表明部分和

$$Y_t^n(\omega)=Y_t^0(\omega)+\sum_{k=0}^{n-1}(Y_t^{k+1}(\omega)-Y_t^k(\omega))$$

在 $[0,T]$ 上对 a.s.$\omega$ 一致收敛．令

$$X_t=\lim_{n\to\infty}Y_t^n$$

则极限函数 $X_t$ 也是 a.s. 连续，而由 $Y_t^n$ 的适应性，可得 $X_t \in \mathcal{F}_t$.

对 $m > n > 0, t \leqslant T$, 由

$$\|Y_t^m - Y_t^n\|_{L^2(P)} \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_t^{k+1} - Y_t^k\|_{L^2(P)}$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} A_1 \left(\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, (n \to \infty) \quad (4-11)$$

于是 $Y_t^n \xrightarrow{L^2, P} X_t$，且 $E\int_0^T X_t^2 \, \mathrm{d}t < \infty$.

往证 $X_t$ 满足随机微分方程 $(4-2\mathrm{a})$. 由

$$Y_t^{k+1} = \eta + \int_0^t a(s, Y_s^k) \mathrm{d}s + \int_0^t b(s, Y_s^k) \, \mathrm{d}B_s$$

利用 Lipschitz 条件及 Fatou 引理以及 $(4-11)$ 式,

$$E\int_0^T |X_t - Y_t^n|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \varliminf_{m \to \infty} E\int_0^T |Y_t^n - Y_t^m|^2 \, \mathrm{d}t \to 0$$

而由 Ito 同构,

$$\int_0^t b(s, Y_s^n) \mathrm{d}B_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t b(s, X_s) \, \mathrm{d}B_s$$

以及 Hoder 不等式得到

$$\int_0^t a(s, Y_s^n) \, \mathrm{d}s \xrightarrow{L^2} \int_0^t a(s, X_s) \, \mathrm{d}s$$

综上得

$$X_t = \eta + \int_0^t a(s, X_s) \, \mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s) \, \mathrm{d}B_s$$

由于

$$E|Y_t^{k+1}|^2 \leqslant 3E(|\eta|^2) + 3E|\int_0^t a(s, Y_s^k)\,\mathrm{d}s|^2$$

$$+3E|\int_0^t b(s, Y_s^k)\mathrm{d}B_s|^2$$

$$\leqslant C(1 + E|\eta|^2) + C\int_0^t E|Y_s^k|^2\,\mathrm{d}s$$

这里 $C$ 只依赖于 $L,T$ 等常数. 于是由归纳法可得

$$E|Y_t^{k+1}|^2 \leqslant \Big[C + C^2 t + C^3\frac{t^2}{2}$$

$$+ \cdots + C^{k+2}\frac{t^{k+1}}{(k+1)}\Big](1 + E|\eta|^2)$$

因此

$$E|Y_t^{k+1}|^2 \leqslant C(1 + E|\eta|^2)\mathrm{e}^{Ct}$$

由 Fatou 引理，得到

$$E|X_t|^2 \leqslant C(1 + E|\eta|^2)\mathrm{e}^{Ct} < \infty$$

对 $f(x) = x^{2k}$ 应用 Ito 公式，可证 $(4-5)$ 式、$(4-6)$ 式留给读者.

□

**4.3注** 如果方程 $(4-2\mathrm{b})$ 的系数 $a, b$ 满足所谓的局部 Lipschitz 条件, 即对常数 $N$ 以及 $|x| \leqslant N, |y| \leqslant N$, 存在常数 $L = L(N)$, 使得 $(4-3)$ 式成立，则 $(4-2\mathrm{b})$ 仍然有唯一的解.

证明的方法是利用停时技术，令 $\tau = \inf\{t : \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t| \geqslant N\}$, 并设 $X_t^N = X_t^\tau$. 先对 $X_t^N$ 证明结果，再考虑极限手续.

当 $m=d=1$ 时，对于齐次随机微分方程

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)\,dB_t, X_0 = \eta \tag{4-12}$$

Yamada 和 Watanabe 给出比 Lipschitz 条件较弱的唯一性条件 (见文献 [15]).

**4.4定理** 设 $m=d=1, A(x), b(x)$ 有界，而且:

(1) 存在 $R_+$ 上严格增函数 $\rho$, 满足 $\rho(0)=0, \forall\epsilon>0$,

$$\int_{(0,\epsilon)} \rho^{-2}(u)\,du = \infty,$$

使得 $\forall x, y \in R$, 有

$$|b(x)-b(y)| \leqslant \rho(|x-y|)$$

(2) 存在 $R_+$ 上不减凹函数 $\gamma$, 满足 $\gamma(0)=0$ 及 $\forall\epsilon>0$,

$$\int_{(0,\epsilon)} \gamma^{-1}(u)\,du = \infty,$$

使得 $\forall x, y \in R$ 有

$$|a(x)-a(y)| \leqslant \gamma(|x-y|)$$

则 $(4-12)$ 式的解具有轨道唯一性.

随机微分方程的求解是一件困难的事, 文献 [10] 给出线性随机微分方程, 也即当 $a(t,X_t)=a_0(t)+a(t)X_t, b(t,X_t)=b_0(t)+b(t)X_t$ 时的解法，其中 $a_0(t), a(t), b_0(t), b(t)$ 为非随机可测函数，也即关于 $\mathcal{B}([0,T])$ 可测函数. 对非随机可测函数 $A(t)$ 我们记 $A(\cdot)\in L^1, L^2$ 分别表示 $|A(t)|, |A(t)|^2$ 在 $[0,T]$ 上可积.

**4.5定理** 设 Lebesgue 可测函数 $b(\cdot)\in L^2$, 则随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = b(t)X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = \eta$$

存在唯一的强解

$$X_t = \eta\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t b^2(s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\mathrm{d}B_s\right\} \tag{4-13}$$

**证明** 解的唯一性等价于证明

$$Z_t = \int_0^t Z_s b(s)\mathrm{d}B_s$$

只有零解. 为简单起见, 不妨设 $T=1$. 令

$$\chi_t^N = \chi\{\omega : \sup_{s\leqslant t} Z_s^2 \leqslant N\}$$

则

$$\begin{aligned}
E\chi_t^N Z_t^2 &= E\chi_t^N\left\{\int_0^t \chi_s^N b(s)\mathrm{d}B_s\right\}^2 \\
&\leqslant E\left\{\int_0^t \chi_s^N b(s) Z_s \mathrm{d}B_s\right\}^2 \\
&\leqslant \int_0^t b^2(s) E\chi_s^N Z_s^N \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

由 Growall 型不等式则得

$$E\chi_t^N Z_t^2 = 0, \text{a.e.} \tag{4-14}$$

于是

$$\begin{aligned}
P(|Z_t|>0) &= P(|Z_t|>0, \chi_t^N = 1) + P(|Z_t|>0, \chi_t^N = 0) \\
&\leqslant P(\chi_t^N Z_t^2 > 0) + P(\sup_{t\leqslant 1} Z_t^2 > N), \text{ a.e. } t \leqslant T
\end{aligned}$$

由 (4-14) 式以及 $Z_t$ 的连续性，得

$$P(\omega : \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Z_t| > 0) = 0$$

可见解是唯一的. 试求 $X_t = f(t, Z_t)$ 形式的解，其中 $f(t,z)$ 在 $[0,T]\times R$ 上定义，且具连续偏导数 $f'_t, f'_z, f''_{z^2}, f'_z \neq 0$, 并设

$$Z_t = \overline{a}(t)\mathrm{d}t + \overline{b}(t)\mathrm{d}B_t, Z_0 = 0$$

其中 $\overline{a}(t), \overline{b}(t) \neq 0$ 适应可测, 满足 $\int_0^T |\overline{a}(t)|\mathrm{d}t < \infty, \int_0^T |\overline{b}(t)|^2\mathrm{d}t < \infty$.a.s. 由 Ito 公式

$$\begin{cases} f'_t + f'_z\overline{a}(t) + \dfrac{1}{2}f''_{z^2}\overline{b}(t) = 0, \\ f'_z\overline{b}(t) = b(t)f \end{cases}$$

由第二式得

$$f(t,z) = c(t)\mathrm{e}^{g(t)z}$$

其中 $g(t) = b(t)/\overline{b}(t)$. 代入第一式，得到

$$\begin{cases} c(t)g'(t) = 0, \\ c'(t) + c(t)\left[g(t)\overline{a}(t) + \dfrac{1}{2}b^2(t)\right] = 0 \end{cases}$$

于是 $g(t) \equiv g$(随机变量)，而

$$c(t) = \eta \exp\left\{-\int_0^t [g\overline{a}(s) + \frac{1}{2}b^2(s)]\mathrm{d}s\right\}$$

从而得到解

$$X_t = f(t, Z_t) = \eta \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t b^2(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}B_s\right\}$$

□

用同样的方法我们得到

$$\mathrm{d}X_t = a(t)X_t\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}B_t,\ X_0 = \eta$$

(其中 $\int_0^T |a(t)|\mathrm{d}t < \infty,\ \int_0^T b^2(t)\mathrm{d}t < \infty$ a.s.) 的唯一强解

$$X_t = \exp\left\{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right\}\cdot \left\{\eta + \int_0^t b(s)\exp\left[-\int_0^s a(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}B_s\right\} \qquad (4-15)$$

下面的随机微分方程在金融数学中将遇到.

**4.6定理** 设 Lebesgue 可测函数 $a(\cdot) \in L^1, b(\cdot) \in L^2$, 则齐次随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = X_t(a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}B_t), \quad X_0 = \eta \qquad (4-16)$$

存在唯一的强解

$$X_t = \eta\exp\left\{\int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}B_s\right\} \qquad (4-17)$$

**4.7定理** 设 Lebesgue 可测函数 $a_0(\cdot), a_1(\cdot) \in L^1$, $b(\cdot) \in L^2$, 则

$$\mathrm{d}X_t = (a_0(t) + a_1(t)X_t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}B_t \quad X_0 = \eta$$

的唯一强解

$$X_t = \mathrm{e}^{\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s}\left\{\eta + \int_0^t a_0(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s a_1(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s a_1(u)\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}B_s\right\} \qquad (4-18)$$

特别当上述定理中 $a_0(t)=0, a_1(t)=-\beta, b(t)=\sigma$ 时，称为 Langevin 方程，它的解称为 Ornstein-Uhlenbeck 速度过程．它描绘了粒子在液体介质的运动速度，其中 $\beta=6\pi r\eta/m$, $r$ 为粒子半径，$\eta$ 为粘滞系数，$m$ 为粒子质量，$-\beta X_t\,\mathrm{d}t$ 表示由介质粘滞产生的阻力．而 $\sigma\mathrm{d}B_t$ 表示液体分子碰撞作用力，$\sigma=\sqrt{2\beta KT/m}$ 这里，$K$ 为 Boltzmann 系数，$T$ 为绝对温度．

对于向量随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t=(A_0(t)+A_1(t)X_t)\mathrm{d}t+B(t)\mathrm{d}B_t \quad X_0=\eta \tag{4-19}$$

其中 $A_0, A_1$ 为 $m\times 1$ 非随机可测向量函数，$B$ 为 $m\times d$ 非随机可测矩阵函数，每个分量分别 a.s. 一次或二次可积，$B$ 为 $d$ 维 Brownian 运动，唯一的强解

$$X_t=\mathrm{e}^{\int_0^t A_1(s)\mathrm{d}s}\left\{\eta+\int_0^t A_0(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s A_1(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right.$$
$$\left.+\int_0^t B(s)\mathrm{e}^{\int_0^s A_1(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}B_s\right\} \tag{4-20}$$

定理 4.3 给出的解法还可解某些非线性的方程．

**4.8定理** 随机微分方程 (4 – 2b) 可用上述“**分离法**”求解的充要条件是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{b(t,x)\left[\frac{\partial b(t,x)/\partial t}{b^2(t,x)}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(t,x)}{b(t,x)}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}\right]\right\}=0 \tag{4-21}$$

**证明** 必要性：按上述方法，存在二元连续函数 $f(t,z)$, 满足 $\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ 连续，使得 $X_t=f(t,Z_t)$, 其中 $Z_t$ 满足

$$\mathrm{d}Z_t=\overline{a}(t)\,\mathrm{d}t+\overline{b}(t)\,\mathrm{d}B_t, Z_0=0$$

令

$$F(t,z,x) = f(t,z) - x$$

因为

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$$

故方程 $F(t,z,x)=0$ 有唯一的连续解 $z=g(t,x)$, 且

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\partial g/\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^3$$

由 Ito 公式，我们有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overline{a}(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\overline{b}^2(t) = a(t, f(t,z)), \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\overline{b}(t) = b(t, f(t,z)) \end{cases} \tag{4-22}$$

从而有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial x}a(t,x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\overline{b}^2(t) = \overline{a}(t), \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}b(t,x) = \overline{b}(t) \end{cases} \tag{4-23}$$

由此两式分别得到

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\overline{b}(t)}{b(t,x)} \tag{4-24}$$

以及

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial g}{\partial x}a(t,x) + \frac{1}{2}b^2(t,x)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{4-25}$$

由 (4 − 24) 式可算得 $\frac{\partial g}{\partial x \partial t}$ 以及 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$，代入 (4 − 25) 式整理得

$$\frac{\overline{b}'(t)}{\overline{b}(t)} = b(t,x)\left\{\frac{\partial b(t,x)/\partial t}{b^2(t,x)} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(t,x)}{b(t,x)}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}\right\}$$

必要性得证.

充分性：假定 (4 − 21) 式条件成立，我们可令

$$\frac{\overline{b}'(t)}{\overline{b}(t)} = b(t,x)\left\{\frac{\partial b(t,x)/\partial t}{b^2(t,x)} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(t,x)}{b(t,x)}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}\right\} \tag{4-26}$$

令 $z = g(t,x)$ 满足

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\overline{b}(t)}{b(t,x)} \tag{4-27}$$

由 (4 − 27) 式得到

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-\overline{b}(t)\partial b(t,x)/\partial x}{b^2(t,x)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} = \frac{\overline{b}'(t)b(t,x) - \overline{b}(t)[\partial b(t,x)/\partial t]}{b^2(t,x)}$$

而 (4 − 26) 式表明

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}a(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}b^2(t,x)\right] = 0$$

于是可令

$$\overline{a}(t) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}a(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}b^2(t,x) \tag{4-28}$$

再由 $z = g(t, x)$, 得出反函数 $x = f(t, z)$ 代入 (4 − 27) 式、(4 − 28) 式便得 (4 − 22) 式、这表明我们的解法可行. □

## §4.2 $L$ 扩散过程与解的马氏性

为了叙述的方便，我们讨论一维的情形. 称满足随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = a(t, X_t)\,\mathrm{d}t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t, X_0 = \eta \qquad (4-29)$$

的解 $X = (X_t)$ 为 $L$ **扩散过程**，其中方程的系数 $a, b$ 满足 (4 − 2b) 式的条件， $L$ 为拟椭圆算子:

$$L_t f(x) = a(t, x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

我们将证明 (4-29) 式的解是一个非时齐马氏过程， $L_t$ 就是它的无穷小算子 . $L$ 扩散过程也称为 Ito **扩散过程**.

**4.9定理** 当方程 (4 − 29) 的系数 $a, b$ 满足局部 Lipschitz 条件与线性增长条件，且 $\eta$ 与 $B_t, t \leqslant T$ 独立，则它的解是一个马氏过程，其 (弱) 无穷小算子

$$A_t f(x) = a(t, x)f'(x) + \frac{1}{2}b^2(t, x)f''(x) \qquad (4-30)$$

其中 $f \in C_0^2(R)$.

**证明** 由随机积分的定义，

$$\begin{aligned} X_t &= \eta + \int_0^t a(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}B_s \\ &= X_s + \int_s^t a(u, X_u)\mathrm{d}u + \int_s^t b(s, X_u)\mathrm{d}B_u \end{aligned}$$

可见 $X_t \in \sigma(\eta, B_u - B_v, 0 \leqslant v \leqslant u \leqslant t)$, 同时由第二式，它关于 $\sigma(X_s, B_u - B_v, s \leqslant v \leqslant u \leqslant t)$ 可测. 用单调类方法可以证明: 如果随机变量 $\xi$ 关于由某过程 $(Y_t)$ 产生的 $\sigma$ 代数 $\sigma(Y_t, t \leqslant T)$ 可测，则存在无穷维的可测函数 $f(y_1, y_2, \cdots)$, 使 $\xi = f(Y_{t_1}(\omega), Y_{t_2}(\omega), \cdots)$(文献 [9] 附篇引理 6). 这样我们的解 $X_t = f(X_s, Y(\omega))$, 其中 $Y = (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots)), t_i \geqslant s$, 而 $X_s \in \sigma(\eta, B_u - B_v, 0 \leqslant v \leqslant u \leqslant s)$ 与 $Y$ 独立. 于是由定理 0.14, 对 $A \in \mathcal{B}(R)$,

$$
\begin{aligned}
P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) &= P(f(X_s, Y) \in A|\mathcal{F}_s) \\
&= P(f(x, Y) \in A)|_{x=X_s}
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{F}_s = \sigma(X_r, r \leqslant s)$. 将上述的 $\mathcal{F}_s$ 换为 $\sigma(X_s)$ 得到相同的结果，这表明 $X = (X_t)$ 是马氏过程，它的转移函数为

$$
P(s, x, t, B) = P(X_t^{s,x}(\omega) \in B) \quad B \in \mathcal{B} \tag{4-31}
$$

其中

$$
X_t^{s,x} = x + \int_s^t a(u, X_u)\mathrm{d}u + \int_s^t b(u, X_u)\mathrm{d}B_u
$$

现在往求马氏过程 $(X_t)$ 的无穷小算子. 对任意的二次连续可微而且在有界集外等于 0 的函数 $f(x), x \in R$, 非齐次无穷小算子

$$
\begin{aligned}
A_s f(x) &= \lim\nolimits_{\Delta s \to 0} \frac{T_s^{s+\Delta s} f(x) - f(x)}{\Delta s} \\
&= \lim\nolimits_{\Delta s \to 0} \frac{E_{s,x} f(X(s+\Delta s)) - f(x)}{\Delta s}
\end{aligned} \tag{4-32}
$$

其中

$$
T_s^{s+\Delta s} f(x) = \int_{R^m} f(y) p(s, x; s+\Delta s, \mathrm{d}y)
$$

对函数 $f(X_t)$ 应用 Ito 公式，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(X_t) &= f'(X_t)(a(t,X_t)\mathrm{d}t + b(t,X_t)\mathrm{d}B_t) \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(X_t)b^2(t,X_t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}& f(X(s+\Delta s)) - f(X(s)) \\ = & \int_s^{s+\Delta s}\left[f'(X(u))a(u,X(u)) + \frac{1}{2}f''(X(u))b^2(u,X(u))\right]\mathrm{d}u \\ & + \int_s^{s+\Delta s} f'(X(u))b(u,X(u))\mathrm{d}B_u\end{aligned}$$

两边取期望，右边随机积分的期望为 0, 代入 $(4-32)$ 式，而考虑到 $f', f''$ 有界连续的性质，期望与 Lebesgue 积分可交换次序，再令 $\Delta s \to 0$, 遂得

$$\mathrm{A}_s f(x) = f'(x)a(s,x) + \frac{1}{2}f''(x)b^2(s,x)$$

□

由上述可见，当随机微分方程 $(4-1)$ 中 $a(t,x), b(t,x)$ 与 $t$ 无关时，我们得到的无穷小算子也与 $t$ 无关，此即齐次转移函数的无穷小算子，记为 A.Brownian 运动或 Wiener 过程本身也可看成是满足当 $a \equiv 0, b \equiv 1$ 随机微分方程 $(4-1)$ 的解，它是齐次马氏过程，其无穷小算子

$$\mathrm{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x)$$

上述定理的多维形式是

**4.10定理** 在 4.1 定理的条件下，如果初始值 $\eta$ 与 $\sigma(B_t, t \geqslant 0)$ 独立，则方程 $(4-2b)$ 的解为马氏过程，其无穷小算子 $\mathrm{A}_t$(即拟椭圆算子) 为

$$\mathrm{A}_t f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} \sigma_{ik}(t,x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} a_i(t,x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad f \in C^2(R^m) \qquad (4-33)$$

如果随机微分方程的系数 $a(t,x), b(t,x)$ 不依赖 $t$，则无穷小算子是齐次的，即

$$\mathrm{A} f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} \sigma_{ik}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad f \in C^2(R^m) \qquad (4-34)$$

这里 $\sigma_{jk}(t,x)$ 为 $BB^T$ 的第 $(j,k)$ 元素.

**证明** 略. □

上述的解实际上是一个轨道连续的强马氏过程，称为 Ito 扩散过程，并称 $a$ 为飘移向量， $BB^T$ 为扩散矩阵，相应的无穷小算子也称为 **扩散的生成算子**.

马氏性的另一等价表达为：设 $(X_t, \mathcal{F}_t), t \in R_+$ 为取值于 $R^m$ 上的齐次马氏过程，则对任意的有界 Borel 可测函数 $f: R^m \to R$, 有

$$E_x\left(f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t\right) = E^{X_t} f(X_h) \qquad (4-35)$$

等价性的证明是简单的，事实上如果取 $f=I_B, B\in\mathcal{B}(R)$ 为示性函数，则由 (4 − 35) 式可得

$$P\left(X_{t+h}^{x}\in B|\mathcal{F}_t\right)=P^{X_t}(X_h\in B)$$

而上式右端就是 $P(h,X_t,B)=P(X_{t+h}^{x}\in B|X_t)$(文献 [9]p101(12) 式). 因此 (4 − 35) 式表明 $X$ 为齐次马氏过程. 而等价性另一面的证明可由单调类定理循通常的由简单函数逼近可测函数的方法得到.

设 $X$ 是循序可测的过程，而且如将 (4 − 35) 式中 $t$ 换为停时 $\tau,\mathcal{F}_t$ 换为 $\mathcal{F}_\tau$ 仍成立，则称此时的 $X$ 为 **强马氏过程**.

**4.11定理**　$L$ 扩散过程是强马氏过程.

**证明**　证明完全类似于 4.9 定理的证明，只要利用到 Brownian 运动的强马氏性. □

对于齐次马氏过程 $X=(X_t)$, 我们定义有界线性算子

$$\mathrm{T}_t f(x)=\int_{R^m}f(y)P(t,x,\mathrm{d}y),\ f\in B(\text{ 有界 Borel 可测函数})$$

可以证明 $T_t, t\geqslant 0$ 是一个压缩算子半群，而且由测度论的经典证法可知

$$T_t f(x)=E_x f(X_t) \tag{4-36}$$

而 (弱) 无穷小算子

$$\mathrm{A}f(x)\triangleq\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t f(x)-f(x)}{t}, f\in\mathrm{dom}(A)$$

其中 $\mathrm{dom}(A)=\{f\in B_0,\text{而且}\forall x, Af(x)\in B_0\}$, 这里 $B_0=\{f: f\text{为有界Borel可测函数，且}\forall x,\lim\limits_{t\downarrow 0}T_t f(x)=f(x).\}$

无穷小算子具有某种微分的意义. 自然称下面的 Dynkin 公式为随机的牛顿–莱布尼茨公式.

**4.12定理 (Dykin 公式)** 设 $f \in C_0^2(R^m)$, $\tau$ 为停时, $E\tau < \infty$, 则

$$E_x f(X_\tau) = f(x) + E_x \int_0^\tau \mathrm{A} f(X_s)\,\mathrm{d}s \tag{4-37}$$

**证明** 假设 $h_\lambda = (\lambda I - A)f$, 其中 $I$ 为恒等算子, 半群算子 $T$ 的 Laplace 变换 (豫解算子)

$$R_\lambda f = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t f\,\mathrm{d}t$$

可以证明

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \tag{4-38}$$

事实上, 记 $F(x) = R_\lambda f(x)$, 则

$$\begin{aligned} T_h F(x) &= T_h \left( \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t f(x) \mathrm{d}t \right) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_{t+h} f(x) \mathrm{d}t = \int_h^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t-h)} T_t f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{\lambda h} \int_h^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t f(x) \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{\lambda h} \left( F(x) - \int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t f(x)\,\mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

从而

$$
\begin{aligned}
AF(x) &= \operatorname*{l.i.m}_{h\downarrow 0} \frac{T_hF(x)-F(x)}{h} \\
&= \operatorname*{l.i.m}_{h\downarrow 0} \left\{ \frac{e^{\lambda h}-1}{h}F(x) - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T_t f(x)\,dt \right\} \\
&= \lambda F(x) - f(x)
\end{aligned}
$$

故 (4 − 38) 式得证. 由此，我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (\lambda I - A)^{-1}h_\lambda(x) = R_\lambda h_\lambda(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t(h_\lambda(x))dt \\
&= E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(X_t)\,dt \\
&= E_x \left( \int_0^\tau e^{-\lambda t}h_\lambda(X_t)\,dt + \int_\tau^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(X_t)\,dt \right)
\end{aligned}
$$

对后一积分进行变量替换，然后利用强马氏性得到

$$
\begin{aligned}
& E_x\left(\int_\tau^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(X_t)dt\right) \\
&= E_x\left(e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(X_{s+\tau})\,ds\right) \\
&= E_x\left[E_x\left(e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(X_{s+\tau})ds|\mathcal{F}_\tau\right)\right] \\
&= E_x\left\{e^{-\lambda\tau}E_{X_\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(X_s)ds\right\} \\
&= E_x e^{-\lambda\tau}f(X_\tau)
\end{aligned}
$$

将 $h_\lambda = \lambda f - Af$ 代入，则得

$$E_x e^{-\lambda\tau} f(X_\tau) = f(x) - E_x \int_0^\tau e^{-\lambda t}(\lambda f(X_t) - Af(X_t))\mathrm{d}t$$

利用 $f$ 的有界性，以及 $Af(x)$ 的有界性，令 $\lambda \to 0$, 并注意到

$$\left|E_x \int_0^\tau e^{-\lambda t}\lambda f(X_t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \lambda\|f\|(1 - e^{-\lambda\tau}) \leqslant \lambda\|f\|E_x\tau < \infty$$

则得 (4 − 37) 式. □

## §4.3 弱解与鞅问题

求随机微分方程 (4 − 1) 的弱解，就是要构造一个带 $\sigma$ 代数流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$, 以及一对过程 $(X_t, B_t), t \leqslant T$, 使得 $B = (B_t)$ 为 Brownian 运动， $X_t$ 满足 (4 − 1) 式. 对于弱解，我们可以只要求分布的唯一性. 例如 Tanaka 方程

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\mathrm{d}B_s, t \in R_+$$

的解是连续局部鞅，而且 $[X]_t = \langle X \rangle_t = t$. 由此可知 $X_t$ 本身就是 Brownian 运动，而 $-X_t$ 也是 Tanaka 方程的解. 两者轨道不一致，但分布唯一. 为了得到 Tanaka 方程其它的解，我们只要取任意的概率空间上的 Brownian 运动作为 $X$, 而令 $W_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\mathrm{d}X_s$, 则 $W$ 也是 Brownian 运动，且

$$\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\mathrm{d}W_s = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\mathrm{sgn}(X_s)\mathrm{d}X_s = X_t$$

这样 $(X,W)$ 就是 Tanaka 方程的弱解. 对于强解, $B$ 事先给定, 因此解过程 $X_t \in \mathcal{F}_t^B \vee \sigma(\eta)$, 而对于上述弱解, 我们先构造解过程 $X$, 再构造 $W$, 因此 $W$ 是 $\mathcal{F}^{X,\eta}$ 可测, 其中 $\mathcal{F}^X = \sigma(X) \vee \sigma(\eta)$.

如果在应用问题中只涉及解的分布, 例如确定某些与解过程有关事件的概率, 期望, 不同过程分布的绝对连续性以及偏微分方程解的概率表示, 我们只要讨论弱解; 而当涉及根据观测到过程的轨道, 如考虑控制或滤波则需讨论强解.

文献 [4] 之定理 18.4 证明了 $(4-1)$ 式有唯一强解的充要条件是对任意的 $x \in R^m$(常数) 方程有唯一的弱解且有轨道的唯一性. 必要性是明显的, 充分性的证明可以参考文献 [4].

为了讨论多维随机微分方程的弱解, 我们引入下面的 Wiener 空间.

令 $\mathcal{W}^m = C(R_+ \to R^m)$, 在 $\mathcal{W}^m$ 上定义半范数: $\forall w \in \mathcal{W}^m$,

$$\|w\|_{\mathcal{W}^m} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{0 \leqslant t \leqslant n}(|w(t)| \wedge 1)$$

则 $\mathcal{W}^m$ 是 Frechet 空间, 称其为 Wiener 空间. 令 $\mathcal{W}_t^m = C([0,t] \to R^m)$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{W}^m) = \sigma(\mathcal{W}^m), \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m) = \sigma(\mathcal{W}_t^m)$$

对于任意的 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$, 记

$$P_x(X^x \in B) = P(\omega : X^x \in B) \qquad (4-39)$$

它表示从 $x$ 出发的 $L$ 扩散过程 $X$ 落入 $B$ 的概率. 令

$$Q_x(B) = P_x(X^x \in B)$$

即 $X^x$ 的分布. 测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ 与 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m), Q_x)$ 在同构的意义下, 可以看成是同一个.

考虑一般形式的随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = a(t,X)\mathrm{d}t + b(t,X)\mathrm{d}B_t, t \in R_+, X_0 = x \qquad (4-40)$$

其中 $B=(B_t)$ 为 $d$ 维 Brownian 运动, $a: R_+ \times \mathcal{W}^m \to R^m, b: R_+ \times \mathcal{W}^m \to R^m \otimes R^d$ 均为 $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$ 可测, 且 $\forall t \in R_+, a(t,x), b(t,x)$ 为 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 适应可测. 它的解称为是 $m$ 维 Ito 扩散.

**4.13定理** 如果 $X$ 是 $m$ 维 Ito 扩散, 无穷小算子为 $A$, 令

$$M_t^f = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)\mathrm{d}s$$

则 $(M_t, \mathcal{F}_t^B), t \in R_+$ 是连续局部鞅.

**证明** 由于 $m$ 维 Ito 扩散满足:

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}t + b(X_t)\mathrm{d}B_t, X_0 = x$$

对于 $f \in C_b^2(R^m)$, 由 Ito 公式

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t Af(s,X)\mathrm{d}s + \int_0^t \nabla f(s,X)b(s,X)\mathrm{d}B_s$$

令

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)\mathrm{d}s (= f(x) + \int_0^t \nabla f(X_s)b(s,X)\mathrm{d}B_s$$

因为 Ito 积分是鞅，故

$$E_x(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s, t > s.$$

于是

$$\begin{aligned} E_x(M_t|\mathcal{F}_s^B) &= E_x\left(E_x\left(M_t|\mathcal{F}_s\right)|\mathcal{F}_s^B\right) \\ &= E_x(M_s|\mathcal{F}_s^B) = M_s \end{aligned}$$

□

**4.13'定理** 如果 $Q_x$ 是由 Ito 扩散过程 $X$ 的概率分布诱导出来的 $\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$ 上的测度，则对所有的 $f \in C_b^2(R^m)$ 过程

$$\begin{aligned} N_t^f &= f(X_t) - \int_0^t Af(X_r)\mathrm{d}r \\ &\quad (= f(w_t) - \int_0^t Af(w_r)\mathrm{d}r); w \in \mathcal{W}^m \end{aligned}$$

在概率测度 $Q_x$ 下关于 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 是鞅. 其中 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m) = \sigma(\mathcal{W}_t^m)$, 并且假定已经完备化，而 $\mathcal{W}_t^m = C([0,t] \to R^m)$. 这也被说成是 $Q_x$ 解答了微分 (无穷小) 算子 $A$ 的鞅问题.

**证明** 由于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ 与 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m), Q_x)$ 在同构的意义下，可以看成是同一个. 因此在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ 上定义的随机过程与在 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m), Q_x)$ 上的坐标过程是同一的，因此 4.13 定理与 4.13' 定理等价. □

4.13 定理及 4.13' 定理指出如果 $X$ 是方程 $(4-40)$ 的弱解，则在测度 $P_x(Q_x)$ 下 $M_t^f(N_t^f)$ 关于 $\mathcal{F}_t^B(\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m))$ 为连续局部鞅. 下面是反问题：

**4.14定理** 如果 $(M_t^f, \mathcal{F}_t^B), t \in R_+$ 为连续局部鞅，则 $X$ 就是 $(4-40)$ 式的弱解.

**证明** $\forall n$, 令 $\tau_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$, 选取 $f \in C_0^2(R^m)$, 使得当 $|X| < n$ 时有 $f(x) = x^i$, 于是

$$M_n^i(t) \triangleq X_{\tau_n \wedge t}^i - X_0^i - \int_0^{\tau_n \wedge t} a_i(s, X)\mathrm{d}s \in \mathfrak{M}_c^2$$

令 $\tau_n \to \infty$a.s., 这表明

$$M^i(t) \triangleq X_t^i - X_0^i - \int_0^t a_i(s, X)\mathrm{d}s \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c, 1 \leqslant i \leqslant m \quad (4-41)$$

类似地, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant m$, 选 $f \in C_b^2(R^m)$, 使当 $|x| \leqslant n$ 时, $f(x) = x^i x^j$, 则可得

$$X_t^i X_t^j - X_0^i X_0^j - \int_0^t a^i(s, X) X_s^j \mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t a^j(s, X) X_s^i \mathrm{d}s - \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X)\mathrm{d}s \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$$

而由 Ito 公式可得

$$X_t^i X_t^j = X_0^i X_0^j + \int_0^t X_s^i \mathrm{d}X_s^j + \int_0^t X_s^j \mathrm{d}X_s^i + [M_t^i, M_t^j]$$

比较上述两个结果有

$$\int_0^t X_s^i \sum_{k=1}^d b_{jk}(s, X_s)\mathrm{d}B_s^k + \int_0^t X_s^j \sum_{k=1}^d b_{ik}(s, X_s)\mathrm{d}B_s^k +$$

$$[M_t^i, M_t^j] - \int_0^t \sigma_{ij}(s, X)\mathrm{d}s \in \mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}^c$$

因此

$$[M_t^i, M_t^j] = \int_0^t \sigma_{ij}(s, X)\mathrm{d}s$$

根据 Brownian 运动的弱可料表示性 (3.15 定理)，存在原概率空间的拓广 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, (\tilde{\mathcal{F}}_t))$ 以及一个 $d$ 维 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$Brownian 运动使得

$$M_t = \int_0^t b(s, X)\mathrm{d}B_s$$

从而由 $(4-41)$ 式

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X)\mathrm{d}B_s$$

亦即 $(X, B)$ 为方程 $(4-40)$ 的弱解. □

我们业已指出上面的无穷小算子 $A$ 就是拟椭圆算子 $L$, 在齐次情形

$$L = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{m} \sigma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

所以上述两个定理实际上把一个概率问题 (4.13 定理) 与一个分析问题 (4.13' 定理) 联系在一起, 而在上述问题中我们只涉及过程 $X$, 并不需要构造 Brownian 运动，也不出现随机积分. 这是 Stroock-Varanhan 方法的一个优点，文献 [4](th.20.4) 给出利用它研究 Ito 方程

$$\mathrm{d}X_t = a(t, X)\,\mathrm{d}t + b(t, X)\mathrm{d}B_t, X_0 = \eta$$

弱解存在的条件：只要系数 $a, b$ 在 $R_+ \times \mathcal{W}^m$ 上有界连续.

## §4.4 Feynman-Kac 公式

本节讨论的 Feynman-Kac 公式实际上是应用概率论的方法给出某些偏微分方程的解，这是研究偏微分方程的边值问题概率解

的基础. Feynman-Kac 公式也在金融数学中期权定价问题中有重要的应用.

**4.15定理 (Kolmogorov 倒向方程)** 设 $X=(X_t)$ 为时齐的 Ito 扩散, $A$ 为它的无穷小算子, $f\in C_0^2(R^m)$.

(1) 令

$$u(t,x)=E_x f(X_t) \tag{4-42}$$

则 $u(t,\cdot)\in \mathrm{dom}(A)$, 且 $\forall t>0$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Au, & t>0, x\in R^m\\ u(0,x)=f(x), & x\in R^m\end{cases} \tag{4-43}$$

(2) 如果有界函数 $w(t,x)\in C^{1,2}(R_+\times R^m)$ 满足 $(4-43)$ 式则 $w(t,x)\equiv u(t,x)$.

**证明** 1) 令 $g(x)=u(t,x)$, 由 Dynkin 公式, 它关于 $t$ 可微,

$$\begin{aligned}&\frac{E_x g(X_r)-g(x)}{r}\\ =&\ \frac{1}{r}\left\{E_x\left(E_{X_r}f(X_t)\right)-E_x f(X_t)\right\}\\ =&\ \frac{1}{r}E_x\left\{E_x(f(X_{t+r})|\mathcal{F}_r)-E_x(f(X_t)|\mathcal{F}_r)\right\}\\ =&\ \frac{1}{r}E_x\left[f(X_{t+r})-f(X_t)\right]\\ =&\ \frac{u(t+r,x)-u(t,x)}{r}\end{aligned}$$

令 $r\downarrow 0$, 则得 $Au=\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

2) 往证满足 $(4-43)$ 式解的唯一性. 设 $w(t,x)\in C_b^{1,2}(R_+\times R^m)$ 满足 $(4-43)$, 定义

$$\begin{cases} \widetilde{A}w \triangleq -\dfrac{\partial w}{\partial t} + Aw, \quad t > 0, x \in R^m \\ w(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{4-44}$$

固定 $(s,x) \in R_+ \times R^m$, 定义过程 $Y_t = (s-t, X_t^{0,x}), t \geqslant 0$. 首先证明 $(Y_t)$ 是取值于 $R^{m+1}$ 上时齐马氏过程: 事实上, $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(R^{m+1})$,

$$\begin{aligned} & P(Y_{t+h} \in \Gamma | Y_t = (s-t, u)) \\ = \ & P((s-t-h, X_{t+h}^{0,x}) \in \Gamma | (s-t, X_t^{0,x}) = (s-t, u)) \\ = \ & P(X_{t+h}^{0,x} \in \Gamma_{s-t-h} | X_t^{0,x} = u) \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} X_{t+h}^{0,x} &= x + \int_0^{t+h} a(X_v^{0,x})\mathrm{d}v + \int_0^{t+h} b(X_v^{0,x})\mathrm{d}B_v \\ &= u + \int_t^{t+h} a(X_v^{0,x})\mathrm{d}v + \int_t^{t+h} b(X_v^{0,x})\mathrm{d}B_v \\ &= u + \int_0^h a(X_{t+y}^{0,x})\mathrm{d}y + \int_0^h b(X_{t+y}^{0,x})\mathrm{d}B_{t+y} \end{aligned}$$

可见 $(Y_t)$ 是马氏过程, 而且 $P(Y_{t+h} \in \Gamma | Y_t = (s-t, u))$ 只与时差 $h$ 有关, 因此 $(Y_t)$ 是时齐马氏过程. 往证它的无穷小算子就是由 (4 - 44) 式的第一式所定义的 $\widetilde{A}$. 事实上,

$$\begin{aligned} \widetilde{A}w(s,x) &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{E_{(s,x)}w((s-t), X_t^{0,x}) - w(s,x)}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{E_{(s,x)}w((s-t), X_t^{0,x}) - E_{s,x}w((s, X_t^{0,x}))}{t} \\ &\quad + \lim_{t\downarrow 0} \frac{E_{(s,x)}w((s, X_t^{0,x})) - w(s,x)}{t} \\ &= -\frac{\partial w}{\partial t}(s,x) + Aw(s,x) \end{aligned}$$

上面第二个等号的第二项中 $s$ 不变，恰是 $Aw(s,x)$，而第一项由有界收敛定理，将极限与期望 $E_{s,x}$ 交换 (请读者完成)，则得

$$E_{s,x}\left(-\frac{\partial w}{\partial s}(s,x)\right)=-\frac{\partial w}{\partial s}(s,x).$$

令 $\tau_R=\inf\{t\geqslant 0:|X_t|\geqslant R\}$，对 $w\in C^{1,2}(R_+\times R^m)$ 应用 Dynkin 公式，并由 $\widetilde{A}w=0$ 得

$$\begin{aligned}E_{s,x}w(Y_{t\wedge\tau_R}) &= w(s,x)+E_{s,x}\left(\int_0^{t\wedge\tau_R}\widetilde{A}w(Y_r)\mathrm{d}r\right)\\ &= w(s,x)\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$，则有

$$E_{s,x}w(Y_t)=w(s,x),\ \forall t\geqslant 0$$

特别取 $t=s$，则得

$$\begin{aligned}w(s,x) &= E_{s,x}w(Y_s)=Ew((0,X_s^{0,x}))\\ &= Ef(X_s^{0,x})=E_x f(X_s)=u(s,x)\end{aligned}$$

□

**注**: $u(t,x)=T_tf(x)$，由 Dykin 公式，$\forall f\in C_0^2(R^m),t>0$，有

$$\forall x,\ \frac{\partial}{\partial t}(T_tf)(x)=E_xAf(X_t)=T_t(Af)(x)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_tf)=T_t(Af)$$

而 (4 − 43) 式即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_tf)=A(T_tf)$$

这表明算子 $T_t$ 与 $A$ 可交换.

**4.16定理** (**Feynman-Kac 公式**) 设 $X=(X_t)$ 为 Ito 扩散, $A$ 为它的无穷小算子, $f\in C_0^2(R^m)$, $q$ 下有界.

(1) 令 $v(t,x)=E_x\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t q(X_s)\mathrm{d}s}f(X_t)\right]$ 则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=Av-qv, & t>0, x\in R^m\\ v(0,x)=f(x) & x\in R^m\end{cases}\tag{4-45}$$

(2) 如果 $w(t,x)\in C^{1,2}(R_+\times R^m)$, 且在 $K\times R^m$ 上有界, 其中 $K\subseteq R_+$ 为紧集. 若 $w$ 是方程 (4-45) 的解, 则 $w(s,x)=v(s,x)$.

**证明** 1) 令 $Y_t=f(X_t), Z_t=\mathrm{e}^{-\int_0^t q(X_s)\mathrm{d}s}$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(X_t) &= \left(\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}a_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\sigma_{ij}\right)\mathrm{d}t\\ &\quad+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_j b_{i,j}\,\mathrm{d}B_t^j\\ \mathrm{d}Z_t &= -Z_t q(X_t)\mathrm{d}t\\ d(Y_tZ_t) &= Y_t\,\mathrm{d}Z_t+Z_t\mathrm{d}Y_t\end{aligned}$$

因为 $Y_tZ_t$ 仍是 Ito 过程, 由 Dynkin 公式,

$$v(t,x)=E_x(Y_tZ_t)$$

关于 $t$ 可微.

$$Av(t,x)=\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r}\left(E_x\,v(t,X_r)-v(t,x)\right)$$

而

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left(E_x E_{X_r}(Z_t f(X_t)) - E_x(Z_t f(X_t))\right) \\
=\ &\frac{1}{r}\left\{E_x\left[E_x\left[f(X_{t+r})\mathrm{e}^{-\int_0^t q(X_{s+r})\,\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_r\right] - E_x[Z_t f(X_t)|\mathcal{F}_r]\right]\right\} \\
=\ &\frac{1}{r}E_x\left\{Z_{t+r}\mathrm{e}^{\int_0^r q(X_s)\mathrm{d}s} f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)\right\} \\
=\ &\frac{1}{r}E_x\left[f(X_{t+r})Z_{t+r} - f(X_t)Z_t\right] \\
&+\frac{1}{r}E_x\left[f(X_{t+r})Z_{t+r}(\mathrm{e}^{\int_0^r q(X_s)\mathrm{d}s} - 1)\right] \\
\to\ &\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + q(x)v(t,x).
\end{aligned}
$$

(4 − 45) 式得证.

2) 假定 $w(t,x) \in C^{1,2}(R_+ \times R^m)$ 满足 (4−45) 式且在 $K \times R^m$ 上有界, 则

$$
\widehat{A}w(t,x) \triangleq -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw - qw = 0, t > 0,
$$

$$
x \in R^m; w(0,x) = f(x) \tag{4-46}
$$

固定 $(s,x,z) \in R_+ \times R^m \times R^m$, 令 $Z_t = z + \int_0^t q(X_s)\mathrm{d}s, H_t = (s-t, X_t^{0,x}, Z_t)$, 则对 $\Gamma \in \mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{B}(R) \times \mathcal{B}(R)$,

$$
\begin{aligned}
&P\left(H_{t+h} \in \Gamma | H_t = (s-t,u,v)\right) \\
=\ &P\left((X_{t+h}^{0,x}, Z_{t+h}) \in \Gamma_{t+h} | X_t^{0,x} = u, Z_t = v\right)
\end{aligned}
$$

只与 $h$ 有关, 因此 $H_t$ 是 Ito 扩散, 其无穷小算子

$$\begin{aligned}
A_H(\phi(s,x,z)) &= \underset{t\downarrow 0}{\text{l.i.m}}\ \frac{E_{s,x}\phi(s-t,X_t^{0,x},Z_t)-\phi(s,x,z)}{t} \\
&= \underset{t\downarrow 0}{\text{l.i.m}}\ \frac{\phi(s-t,x,z)-\phi(s,x,z)}{t} \\
&\quad + \underset{t\downarrow 0}{\text{l.i.m}}\ \frac{\phi(s-t,X_t^{0,x},z)-\phi(s-t,x,z)}{t} \\
&\quad + \underset{t\downarrow 0}{\text{l.i.m}}\ \frac{\phi(s-t,X_t^{0,x},Z_t)-\phi(s-t,X_t^{0,x},z)}{t} \\
&= -\frac{\partial\phi}{\partial s}+A\phi+q(x)\frac{\partial\phi}{\partial z},
\end{aligned}$$

其中 $\phi\in C_b^{1,2,2}(R_+\times R^m\times R^m)$. 故由 (4−46) 式及 Dynkin 公式, $\forall t\geqslant 0, k>0, \phi(s,x,z)=\mathrm{e}^{-z}w(s,x)$, 有

$$E_{s,x,z}\left[\phi(H_{t\wedge\tau_R})\right]=\phi(s,x,z)+E_{s,x,z}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R}A_H\phi(H_r)\mathrm{d}r\right]$$

其中 $\tau_R=\inf\{t>0:|H_t|\geqslant R\}$. 注意到

$$A_H\phi(s,x,z)=\mathrm{e}^{-z}\left(\frac{\partial w}{\partial s}+Aw-qw\right)=0$$

因此,

$$\begin{aligned}
w(s,x) &= \phi(s,x,0)=E_{s,x,0}\left[\phi(H_{t\wedge\tau_R})\right] \\
&= E_x\left[\mathrm{e}^{-\int_0^{t\wedge\tau_R}q(X_r)\,\mathrm{d}r}w(s-t\wedge\tau_R,X_{t\wedge\tau_R})\right] \\
&\to E_x\left[\mathrm{e}^{-\int_0^{t}q(X_r)\,\mathrm{d}r}w(s-t,X_t)\right],(R\to\infty)
\end{aligned}$$

特别取 $t=s$, 则得

$$w(s,x) = E_x\left[\mathrm{e}^{-\int_0^s g(X_r)\,\mathrm{d}r} w(0, X_s^{0,x})\right] = v(s,x)$$

得证. □

## §4.5 一类热传导方程柯西问题的解析解

考虑下列柯西问题

问题 (1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + a(b-x)\dfrac{\partial F}{\partial x} - xF = 0 \\ F(T,x;T) = 1 \end{cases} \qquad (4-47)$$

其中 $F = F(t,x;T), 0 \leqslant t \leqslant T, F$ 关于 $t$ 可微,关于 $x \in R_+ = [0,\infty)$ 二次可微, 并且 $F$ 为有界函数.

问题 (2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + a(b-x)\dfrac{\partial H}{\partial x} - xH = 0 \\ H(\rho,x;\rho,T) = (F(\rho,x;T) - K)^+ \end{cases} \qquad (4-48)$$

这里 $x^+ = \max(x,0), H = H(t,x;\rho,T)$ 有界, 关于 $t \leqslant \rho \leqslant T, x \in R_+$ 分别一、二次可微, $\sigma, a, b, K$ 均为常数.

由偏微分方程的理论, 如果上述柯西问题存在有界的解, 那么在有界函数类中, 解是唯一的. 下面我们给出一个有界解, 因而是唯一的解.

**4.17定理** 问题 (1) 的解为

$$\begin{cases} F(t,x;T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-xB(t,T)} \\ B(t,T) = \dfrac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}) \\ A(t,T) = \left(b - \dfrac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t-T+B(t,T)) - \dfrac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T) \end{cases} \tag{4-49}$$

**证明** 问题 (1) 的求解比较简单，因为在有界函数类中问题 (1) 存在唯一的解，令 $F(t,x;T)=\mathrm{e}^{A(t,T)-xB(t,T)}$ 代入问题 (1), 则得一个常微分方程，利用 $A(T,T)=B(T,T)=0$, 得证. □

再求问题 (2) 的解，根据 Feynman-Kac 公式,

$$H(t,x;\rho,T) = E_x(\mathrm{e}^{-\int_0^{\rho-t} r(u)\mathrm{d}u}(F(\rho,r(\rho);T)-K)^+ \tag{4-50}$$

其中随机过程 $r(t)$, 满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}r(t) = a(b-r(t))\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, r(0)=x. \tag{4-51}$$

其中 $W_t$ 为某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的布朗运动, 而 $\mathcal{F}_t=\sigma(W_s, s\leqslant t)$ 为由 $(W_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 产生的自然 $\sigma$ 代数流 . (4 − 51) 式给出了问题 (2) 解的概率表示, 为求解的解析表达. 我们先计算 $H(t,r(t),\rho;T)$.

**4.18引理**

$$\begin{aligned} H(t,r(t);\rho,T) &= F(t,r(t);T)\Phi\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right) \\ &\quad -KF\left(t,r(t);\rho)\Phi(h-\frac{\sigma_0}{2}\right) \end{aligned} \tag{4-52}$$

其中

$$h = \frac{1}{\sigma_0}\log\frac{F(t,r(t);T)}{KF(t,r(t);\rho)},$$

$$\sigma_0 = \sigma B(\rho,T)\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2a(\rho-t)}}{2a}} \tag{4-53}$$

**证明** 由文献 [10] 随机微分方程的方程 (5) 有唯一的解:

$$r(t) = x\mathrm{e}^{-at} + b(1-\mathrm{e}^{-at}) + \sigma\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}W_s$$

它是一个从 $x$ 出发的马氏过程. 如通常, 记 $P_x$ 为由此马氏过程所确定的分布, 相应的期望算子为 $E_x$. 由于 $r(t), W_t$ 可以相互表示, 因此 $\mathcal{F}_t = \sigma(r(s), s \leqslant t)$. 利用马氏性

$$\begin{aligned}
&H(t,r(t);\rho,T)\\
&= E_{r(t)}(\mathrm{e}^{-\int_0^{\rho-t} r(u)\mathrm{d}u}(F(\rho,r(\rho);T)-K)^+\\
&= E_x\left[\mathrm{e}^{-\int_t^{\rho} r(u)\mathrm{d}u}(F(\rho,r(\rho);T)-K)^+|\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} \tag{4-54}$$

记

$$V(t,T) = E_x(\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t),\ \widetilde{V}(t,T) = V(t,T)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}$$

则对任意的 $s \leqslant t$, 有 $E_x(\widetilde{V}(t,T)|\mathcal{F}_s) = \widetilde{V}(s,T)$, 即 $(\widetilde{V}(t,T))$ 为鞅. 记 $F(t,x;T) = E_x(\mathrm{e}^{-\int_0^{T-t} r(u)\mathrm{d}u})$, 则由马氏性,

$$V(t,T) = E_x(\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}|\mathcal{F}_t) = F(t,r(t);T) \tag{4-55}$$

因 $\widetilde{V}(t,T)$ 为鞅, 故我们可以定义两个新的概率测度, 使得条件密度

$$\frac{\mathrm{d}P_1(\cdot|\mathcal{F}_t)}{\mathrm{d}P_x(\cdot|\mathcal{F}_t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\int_t^{\rho} r(s)\mathrm{d}s}V(\rho,T)}{F(t,r(t);T)},$$

$$\frac{\mathrm{d}P_2(\cdot|\mathcal{F}_t)}{\mathrm{d}P_x(\cdot|\mathcal{F}_t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\int_t^\rho r(s)\mathrm{d}s}}{F(t,r(t);\rho)} \tag{4-56}$$

于是由 (4 − 54) 式,

$$\begin{aligned} H(t,r(t);\rho,T) &= F(t,r(t);T)P_1(r(\rho)\leqslant r^*|\mathcal{F}_t) \\ &\quad -KF(t,r(t);\rho)P_2(r(\rho)\leqslant r^*|\mathcal{F}_t) \end{aligned} \tag{4-57}$$

其中 $r^* = (A(\rho,T)-\log K)/B(\rho,T)$. 为计算上述两个条件概率, 分别求 $r(\rho)$ 在测度 $P_1, P_2$ 下的条件分布. 由 $r(t)$ 解的表达式可知, $r(t)$ 为正态随机变量, 其条件分布的 Laplace 变换为

$$E_i(\mathrm{e}^{\lambda r(\rho)}|\mathcal{F}_t) = \exp\left\{\lambda E_i(r(\rho)|\mathcal{F}_t) + \frac{1}{2}\lambda^2 \mathrm{Var}_i(r(\rho)|\mathcal{F}_t)\right\} \tag{4-58}$$

这里 $E_i(\cdot|\mathcal{F}_t), \mathrm{Var}_i(\cdot|\mathcal{F}_t), i=1,2$ 分别表示在测度 $P_i$ 下条件期望与条件方差. 令

$$\begin{aligned} L(t,x) &= E_x\left(\mathrm{e}^{\lambda r(t)-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}\right), \\ L'(t,x) &= E_x\left(\mathrm{e}^{\lambda' r(t)-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}\right) \end{aligned} \tag{4-59}$$

并考虑到 $V(\rho,T) = \exp\{A(\rho,T) - r(\rho)B(\rho,T)\}$, 我们有

$$\begin{aligned} E_1(\mathrm{e}^{\lambda r(\rho)}|\mathcal{F}_t) &= \frac{\mathrm{e}^{A(\rho,T)}}{F(t,r(t);T)} E_x\left(\mathrm{e}^{\lambda' r(\rho)-\int_t^\rho r(u)\mathrm{d}u}|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{A(\rho,T)}}{F(t,r(t);T)} L'(\rho-t,r(t)) \end{aligned} \tag{4-60}$$

其中 $B(\rho,T), A(\rho,T)$ 由 (3) 式所定义, 而 $\lambda' = \lambda - B(\rho,T)$. 同理

$$\begin{aligned} E_2(\mathrm{e}^{\lambda r(\rho)}|\mathcal{F}_t) &= \frac{1}{F(t,r(t);\rho)} E_x\left(\mathrm{e}^{\lambda r(\rho)-\int_t^\rho r(u)\mathrm{d}u}|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{1}{F(t,r(t);\rho)} L(\rho-t,r(t)) \end{aligned} \tag{4-61}$$

现在讨论 (4 − 61) 式. 因为 $M_t = \mathrm{e}^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u} L(\rho - t, r(t))$ 为 $P_x$ 鞅, 由 Ito 公式得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 L}{\partial r^2} + a(b-r)\dfrac{\partial L}{\partial r} - rL \\ L(0,x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \end{cases} \tag{4-62}$$

令 $L(t,r) = \mathrm{e}^{-a\phi(t)+r\psi(t)}$ 代入方程 (4 − 61) 则得

$$\psi'(t) = -a\psi(t) - 1,\ \phi'(t) = -\frac{\sigma^2}{2a}\psi^2(t) - b\psi(t)$$

$$\phi(0) = 0,\ \psi(0) = \lambda$$

解此常微分方程得到

$$\begin{cases} \psi(t) = \lambda \mathrm{e}^{-at} - B(t) \\ \phi(t) = -\dfrac{\sigma^2(1+a\lambda)^2}{4a^4}(2aB(t) - a^2B(t)^2) \\ \qquad + \dfrac{(1+a\lambda)\sigma^2}{a^3}B(t) - \dfrac{\sigma^2 t}{2a^3} + \dfrac{b(1+a\lambda)}{a}B(t) + \dfrac{bt}{a} \end{cases} \tag{4-63}$$

这里 $B(t) = (1 - \mathrm{e}^{-at})/a$, 而 $1 - \mathrm{e}^{-2at} = 2aB(t) - a^2B^2(t)$. 于是

$$\begin{aligned} E_2(\mathrm{e}^{\lambda r(\rho)}|\mathcal{F}_t) &= \frac{1}{F(t, r(t);\rho)} L(\rho - t, r(t)) \\ &= \exp\{-A(t,\rho) - a\phi(\rho - t) + \lambda r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)}\} \\ &= \exp\{\lambda\big(r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)} + abB(\rho - t) - \frac{\sigma^2 B^2(\rho-t)}{2}\big) \\ &\quad + \frac{\lambda^2\sigma^2}{4a}(1 - \mathrm{e}^{-2a(\rho-t)})\} \end{aligned} \tag{4-64}$$

由此可见,

$$r(\rho)|\mathcal{F}_t, P_2 \sim \text{正态} N\left(r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)} + abB - \frac{\sigma^2 B^2}{2}, \frac{\sigma_0^2}{B^2(\rho,T)}\right)$$

其中 $B \triangleq B(\rho,t) = B(t,\rho)$. 从而

$$P_2(r(\rho) \leqslant r^*|\mathcal{F}_t)$$

$$= \Phi\left(\frac{r^* - r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)} - abB + \sigma^2 B^2/2}{\sigma_0} B(\rho,T)\right) \qquad (4-65)$$

我们可以证明

$$\frac{r^* - r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)} - abB + \sigma^2 B^2/2}{\sigma_0} B(\rho,T) = h - \frac{\sigma_0}{2} \qquad (4-66)$$

事实上，只要证明

$$(r^* - r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)} - abB + \sigma^2 B^2/2) B(\rho,T)$$

$$= A(t,T) - r(t)B(t,T) - \log K - A(t,\rho) + r(t)B - \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (4-67)$$

将 $r^*$ 的表达式代入，并注意到

$$B(t,T) - B = \mathrm{e}^{-a(\rho-t)} B(\rho,T)$$

可消去 $(4-67)$ 式中含 $r(t)$ 的项，因此只需证明

$$A(\rho,T) - A(t,T) + A(t,\rho) - abBB(\rho,T) + \frac{\sigma^2}{2} B^2 B(\rho,T)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{4a} B^2(\rho,T)(2aB - a^2 B^2)$$

而上述等式由初等运算即可证明，于是 $(4-66)$ 式成立. 同理我们可证 $r(\rho)$ 在测度 $hP_1$ 下，关于 $\mathcal{F}_t$ 的条件分布为

$$N\left(r(t)\mathrm{e}^{-a(\rho-t)} + abB - \frac{\sigma^2 B^2}{2} - \frac{\sigma_0^2}{B(\rho,T)}, \frac{\sigma_0^2}{B^2(\rho,T)}\right)$$

$$P_1(r(\rho) \leqslant r^*|\mathcal{F}_t) = \Phi\left(h + \frac{\sigma_0}{2}\right)$$

于是

$$H(t, r(t); \rho, T)$$

$$= F(t, r(t); T)\Phi\left(h + \frac{\sigma_0}{2}\right) - KF(t, r(t); \rho)\Phi\left(h - \frac{\sigma_0}{2}\right) \quad (4-68)$$

注意到 $F(\rho, r(\rho); \rho) = 1$, 而当 $t \to \rho^-$ 时, $\sigma_0 \to 0$, 由

$$h = \frac{1}{\sigma_0}(\log F(t, r(t); T) - \log F(t, r(t); \rho) - \log K)$$

因此当 $t \to \rho$, 且 $F(\rho, r(\rho); T) \geqslant K$ 时, $h \to +\infty$; 而当 $F(\rho, r(\rho); T) < K$ 时, $h \to -\infty$, 于是, $H(t, r(t); \rho, T) \to F(\rho, r(\rho); T) - K$ 或 0. 这样终端条件满足, 引理得证. □

**4.19定理** 问题 (2) 存在唯一的有界解

$$H(t, x; \rho, T)$$

$$= \mathrm{e}^{A(t,T) - xB(t,T)}\Phi\left(h + \frac{\sigma_0}{2}\right)$$

$$-K\mathrm{e}^{A(t,\rho) - xB(t,\rho)}\Phi\left(h - \frac{\sigma_0}{2}\right) \quad (4-69)$$

其中

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_0}\log\frac{F(t, x; T)}{KF(t, x; \rho)}$$

**证明** 由热传导方程的理论, 我们只要证明 (4 − 69) 式为问题 (2) 的有界解, 有界性是明显的, 往验证它为问题 (2) 的解.

由于

$$\sigma_0'(t) = -\frac{\sigma^2}{2\sigma_0}B^2(\rho,T)\mathrm{e}^{-2a(\rho-t)}$$

$$h_x' = \frac{1}{\sigma_0}[B(t,\rho)-B(t,T)]$$

下面简记 $F(T)=F(t,x;T), F(\rho)=F(t,x;\rho)$. 由于

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&F(T)\Phi'\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right) - KF(\rho)\Phi'\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[F(T)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(h+\frac{\sigma_0}{2})^2} - KF(\rho)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(h-\frac{\sigma_0}{2})^2}\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4-70}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial F(T)}{\partial t}\Phi\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right) - K\frac{\partial F(\rho)}{\partial t}\Phi\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right) \\
&\quad + \left\{F(T)\Phi'\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right)\left(h_t'+\frac{\sigma_0'(t)}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -KF(\rho)\Phi'\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)\left(h_t'+\frac{\sigma_0'(t)}{2}\right)\left(h_t'-\frac{\sigma_0'(t)}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{\partial F(T)}{\partial t}\Phi\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right) - K\frac{\partial F(\rho)}{\partial t}\Phi\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\sigma_0'(t)}{2}\left[F(T)\Phi'(h+\frac{\sigma_0}{2}) + KF(T)\Phi'\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

注意到 (4 − 70) 式,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F(T)}{\partial x}\Phi\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right) - K\frac{\partial F(\rho)}{\partial x}\Phi\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)$$

于是

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(T)}{\partial x^2}\Phi(h+\frac{\sigma_0}{2})$$
$$-K\frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial x^2}\Phi\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right) - B(t,T)F(T)\Phi'\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right)h'_x$$
$$+KB(t,\rho)F(\rho)\Phi'\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)h'_x$$

初等的运算告知

$$F(T)\Phi'\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right)+KF(\rho)\Phi'\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(h^2+\frac{\sigma_0^2}{4}\right)}\sqrt{KF(T)F(\rho)}$$
$$F(T)B(t,T)\Phi'\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right)-KF(\rho)B(t,\rho)\Phi'\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(h^2+\frac{\sigma_0^2}{4})}(B(t,T)-B(t,\rho))\sqrt{KF(T)F(\rho)}$$

故

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(T)}{\partial x^2}\Phi\left(h+\frac{\sigma_0}{2}\right)-K\frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial x^2}\Phi\left(h-\frac{\sigma_0}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(h^2+\frac{\sigma_0^2}{4})}(B(t,T)-B(t,\rho))\sqrt{KF(T)F(\rho)}$$

将上述结果代入，方程即可验证. □

## 习题与问题四

4.1 证明 (4 − 5) 式，(4 − 6) 式.

4.2 设 $b(t)\in L^2[0,T]$, 试证随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = b(t)X_t\mathrm{d}B_t, X_0=\eta$$

存在唯一的强解，并求之.

4.3 求随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = a(b - x_t)\mathrm{d}t + a\sqrt{x_t}\mathrm{d}B_t, X_0 = x$$

的解，这里 $a, b$ 为常数.

4.4 令 $X_1(t) = a\cos B_t, X_2(t) = b\sin B_t$, 称 $X_t = (X_1(t), X_2(t))$ 为椭圆

$$\left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

上的 Brownian 运动，证明它满足

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}X_t\mathrm{d}t + MX_t\mathrm{d}B_t$$

其中 $B_t$ 为一维 Brownian 运动，而

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

4.5 解随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = X_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t$$

提示: 两边乘以 $\mathrm{e}^{-t}$, 并考虑 $d(\mathrm{e}^{-t}X_t)$.

4.6 解方程

$$\mathrm{d}X_t = a(t)X_t\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}B_t, X_0 = \eta$$

其中 $|a(t)|, b^2(t) \in L([0,T])$.

4.7 证明 4.5 定理.

4.8 证明 4.6 定理.

4.9 设 $a,b$ 为常数，证明

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{b-Y_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t;\ 0 \leqslant t < 1, Y_0 = a$$

的解为

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{1-s};\ 0 \leqslant t < 1$$

往证 $\lim_{t\to 1} Y_t = b$a.s..，称 $Y_t$ 为从 $a$ 到 $b$ 的 Brownian 桥，它的轨道都经过 $(0,a)$ 与 $(1,b)$ 两点.

4.10 设 $(B_1(t), B_2(t))$ 为二维 Brownian 运动，称 $B_t = B_1(t) + iB_2(t)$ 为复 Brownian 运动，设 $F(z) = u(z) + iv(z)$ 为解析函数，并令 $Z_t = F(B_t)$，往证

$$\mathrm{d}Z_t = F'(B_t)\,\mathrm{d}B_t$$

解复随机微分方程

$$\mathrm{d}Z_t = \alpha Z_t\,\mathrm{d}B_t\ \alpha\text{为常数}$$

4.11 解随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = r\mathrm{d}t + \alpha X_t\,\mathrm{d}B_t$$

提示：两边乘以积分因子 $F_t = \exp(-\alpha B_t + 1/2\alpha^2 t)$.

4.12 证明定理 4.11.

4.13 解非线性随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\,\mathrm{d}t + c(t)X_t\,\mathrm{d}B_t,\ X_0 = x$$

其中 $f: R\times R\to R, c: R\to R$ 为确定性函数.

提示：引入积分因子

$$F_t = \exp\left(-\int_0^t c(s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

证明所给的方程可写为

$$\mathrm{d}(F_t X_t) = F_t\cdot f(t, X_t)\,\mathrm{d}t$$

令

$$Y_t(\omega) = F_t(\omega)X_t(\omega)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} = F_t(\omega)\cdot f(t, F_t^{-1}(\omega)Y_t(\omega)), Y_0 = x$$

对每个 $\omega$, 解此方程，得到 $X_t(\omega)$.

4.14 用 4.13 所提示的方法解

$$\mathrm{d}X_t = \frac{1}{X_t}\mathrm{d}t + \alpha X_t \mathrm{d}B_t, ; X_0 = x > 0$$

4.15 研究用积分因子的方法能求解的随机微分方程能否用“分离法”求解？

4.16 寻找 Ito 扩散过程，使得它的无穷小算子为

a) $Af(x) = f'(x) + f''(x), f\in C_0^2(R)$.

b) $Af(t,x) = \dfrac{\partial f}{\partial t} + cx\dfrac{\partial f}{palx} + \dfrac{1}{2}\alpha^2 x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}; f\in C_0^2(R)$.

c) $$Af(x_1,x_2) = 2x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ln(1+X_1^2+x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \\ \frac{1}{2}(1+x_1^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; f\in C_0^2(R^2).$$

# 第五章　平方可积鞅与 Wiener 泛函的结构

## §5.1　平方可积鞅的 Doob-Meyer 分解

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间， $(\mathcal{F}_t),t\geqslant 0$ 为 $\mathcal{F}$ 的非降子 $\sigma$ 代数族，而且包含 $\mathcal{F}$ 的一切零概集 (因而完备).

我们记 $\mathfrak{M}_T^2$ 为 $[0,T]$ 上的右连续平方可积鞅全体，也即

$$\sup_{t\leqslant T} E\left|X_t\right|^2<\infty$$

这里 $T\leqslant\infty$. 显然 $\mathfrak{M}^2\subseteq\mathfrak{M}_T^2$, 因此， §2.6 的结果在 $\mathfrak{M}_T^2$ 上是成立的. 在 $T<\infty$ 情形，我们特别称 $\mathfrak{M}_T^2$ 为有限时域的平方可积鞅空间.

设 $X\in\mathfrak{M}_T^2,T\leqslant\infty$, 则 $(X_t^2,\mathcal{F}_t),t\in R_+$ 是右闭的下鞅，类 D, 因此有 Doob-Meyer 分解，于是可以定义可积可料增过程 $<X>$. 使得

$$X_t^2=m_t+<X>,\ t\leqslant T$$

一般地，本章中不假定鞅的轨道具有连续性，只具有右连续性.

**例 1**　设 $B=(B_t,\mathcal{F}_t)$ 为限制在 $[0,T]$ 上的 Brownian 运动，则 $<B>_t=t$

**例 2**　设 $X_t=\int_0^t a(s,\omega)\mathrm{d}B_s,E\int_0^t a^2(s,\omega)\mathrm{d}s<\infty$, 则 $(X_t,\mathcal{F}_t)$

$\in \mathfrak{M}_T^2$, 由 Ito 公式

$$X_t^2 = 2\int_0^t a(s,\omega)X_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t a^2(s,\omega)\mathrm{d}s$$

所以 $< X >_t = \int_0^t a^2(s,\omega)\mathrm{d}s$.

下面定理给出的 $< X, Y >$ 称为是 $X, Y$ **可料互变差过程**.

**5.1定理** 设 $X, Y \in \mathfrak{M}_T^2 \leqslant \infty$, 则存在唯一的可料有限变差过程 $< X, Y >$, 使得

$$X_t Y_t = m_t + < X, Y >_t, \qquad (5-1)$$

此时

$$E\left((X_t - X_s)(Y_t - Y_s)|\mathcal{F}_s\right) = E\left(< X, Y >_t - < X, Y >_s |\mathcal{F}_s\right)$$

**证明** 因为 $X+Y, X-Y \in \mathfrak{M}_T^2$, 由 Doob-Meyer 分解定理有

$$X^2 = m(X^2) + < X >_t, Y^2 = m(Y^2) + < Y >_t$$
$$(X_t + Y_t)^2 = m((X+Y)^2)_t + < X + Y >_t$$

其中 $m(\cdot)$ 分别表示 Doob-Meyer 分解中的鞅. 定义

$$< X, Y >_t = \frac{1}{2}\left(< X + Y >_t - < X >_t - < Y >_t\right) \qquad (5-2)$$

易知 $< X, Y >$ 是可料有限变差过程, 当然 $E < X, Y >_T < \infty$. 而

$$\begin{aligned}
& E\left(X_t Y_t - X_s Y_s |\mathcal{F}_s\right) \\
= & \frac{1}{2}E\left\{[(X_t + Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2] - [(X_s + Y_s)^2 - X_s^2 - Y_s^2]|\mathcal{F}_s\right) \\
= & E\left(< X, Y >_t - < X, Y >_s |\mathcal{F}_s\right)
\end{aligned}$$

可见 $(m_t)$ 为鞅. 往证分解的唯一性.

事实上, 如有另一分解 $X_tY_t = m_t' + V_t$, 则 $m_t - m_t' = < X, Y >_t - V_t$ 便是可料可积变差鞅, 由定理 2.28 便知它为 0, 唯一性得证.

□

由 (2 − 5) 式, 对于 $M \in \mathfrak{M}_T^2, \mu_{M^2} = \mu_{<M>}$, 因此, 对于 $M, N \in \mathfrak{M}_T^2, \mu_{MN} = \mu_{<M,N>}$. 所以 $M \perp N \iff < M, N >= 0$. 而且 $M \perp N \iff < M, N >=< M > + < N >$.

**例** 设 $X_t = \int_0^t a(s,\omega)\mathrm{d}B_s, Y_t = \int_0^t b(s,\omega)\mathrm{d}B_s, E\int_0^T a^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty, E\int_0^T b^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty$. 则由 Ito 公式可得

$$< X, Y >_t = \int_0^t a(s,\omega)b(s,\omega)\,\mathrm{d}s,$$

特别有 $< X, B >_t = \int_0^t a(s,\omega)\mathrm{d}s$. 下面我们将要证明对一切 $X \in \mathfrak{M}_T^2$, 上式成立, 这是平方可积鞅理论的中心结果.

**5.2定理** 设 $X = (X_t, \mathcal{F}_t) \in \mathfrak{M}_T^2, T \leqslant \infty, (\mathcal{F}_t)$ 右连续, 则存在适应的可测过程 $(a(t,\omega), \mathcal{F}_t)$, 满足 $E\int_0^T a^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty$, 使得

$$\forall t \leqslant T, < X, B >_t = \int_0^t a(s,\omega)\,\mathrm{d}s \qquad (5-3)$$

为证明这个定理, 我们需要下面的引理.

**5.3引理** 设 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, $X \in \mathfrak{M}_T^2, T \leqslant \infty, g(t,\omega)$ 为可料过程, 满足

$$E\int_0^T g^2(t,\omega)\mathrm{d}s < \infty \qquad (5-4)$$

$Y_t = \int_0^t g(s,\omega)\mathrm{d}B_s$, 则

$$< X,Y >_t = \int_0^t g(s,\omega)\,\mathrm{d} < X,B >_s \qquad (5-5)$$

**证明** 首先指出存在“取左端值”的简单函数列 $g^n(t,\omega) = \sum_{j=0}^{k_n} g(t_j^n,\omega) I_{(t_j^n,t_{j+1}^n]}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |g(t,\omega) - g^n(t,\omega)|^2\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (5-6)$$

事实上，如果 $g$ 是左连续适应过程，则由 $g^n \xrightarrow{\text{a.s}} g$ 以及 $(5-4)$ 式可知 $(5-6)$ 式成立；于是对可料矩形的示性函数 $(5-6)$ 式成立，利用单调类定理便可证明对一切可料过程 $g$, $(5-6)$ 式成立．于是

$$\begin{aligned}
&E\left(< X,Y >_t - < X,Y >_s |\mathcal{F}_s\right)\\
&= E\left((X_t - X_s)\int_s^t g(u,\omega)\mathrm{d}B_u|\mathcal{F}_s\right)\\
&= E\left(X_t\int_s^t g(u,\omega)\mathrm{d}B_u|\mathcal{F}_s\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} E\left(X_t\int_s^t g^n(u,\omega)\mathrm{d}B_u|\mathcal{F}_s\right)
\end{aligned}$$

而 $\int_s^t g^n(u,\omega)\mathrm{d}B_u = \sum\limits_{l\leqslant j\leqslant m} g(t_j^n,\omega)\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)$, 不失一般性，

假设 $t_l^n = s \leqslant t_l^n \leqslant t_{l+1}^n \leqslant t_{m+1}^n = t$, 则

$$\begin{aligned}
&E\left(X_t\int_s^t g^n(u,\omega)\mathrm{d}B_u|\mathcal{F}_s\right)\\
&= \sum_{l\leqslant j\leqslant m} E\left(X_t g(t_j^n,\omega)\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)|\mathcal{F}_s\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l \leqslant j \leqslant m} E\left(g(t_j^n,\omega)\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)E(X_t|\mathcal{F}_{t_{j+1}^n})|\mathcal{F}_s\right)$$

$$= \sum_{l \leqslant j \leqslant m} E\left(g(t_j^n,\omega)\left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)X_{t_{j+1}^n}|\mathcal{F}_s\right)$$

$$= \sum_{l \leqslant j \leqslant m} E\left(g(t_j^n,\omega)E(X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n})(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})|\mathcal{F}_{t_j^n}|\mathcal{F}_s\right)$$

$$= \sum_{l \leqslant j \leqslant m} E\left(g(t_j^n,\omega)E\left(< X,B >_{t_{j+1}^n} - < X,B >_{t_j^n} |\mathcal{F}_{t_j^n}\right)|\mathcal{F}_s\right)$$

$$= \sum_{l \leqslant j \leqslant m} E\left(g(t_j^n,\omega)\left(< X,B >_{t_{j+1}^n} - < X,B >_{t_j^n}\right)|\mathcal{F}_s\right)$$

$$= E\left(\int_s^t g^n(u,\omega)\mathrm{d} < X,B >_u |\mathcal{F}_s\right) \qquad (5-7)$$

令 $n \to \infty$, 则得

$$E(< X,Y >_t - < X,Y >_s |\mathcal{F}_s)$$
$$= E\left(\int_s^t g(u,\omega)\,\mathrm{d} < X,B >_u |\mathcal{F}_s\right)$$

于是

$$E\left(X_tY_t - \int_0^t g(u,\omega)\mathrm{d} < X,B >_u |\mathcal{F}_s\right)$$
$$= X_sY_s - \int_0^s g(u,\omega)\mathrm{d} < X,B >_u$$

这表明 $X_tY_t - \int_0^t g(u,\omega)\mathrm{d} < X,B >_u$ 为鞅，由定理 5.1 即知

$$< X,Y >_t = \int_0^t g(u,\omega)\mathrm{d} < X,B >_u$$

□

**5.4引理** 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间，$(\mathcal{F}_t)$ 完备，假定可测过程 $F(t,\omega)$ 是适应的，且 $\forall t$, 关于$tP-$a.s. 绝对连续，即存在可测过程 $f$ 满足 $\int_0^t |f(s,\omega)|\mathrm{d}s<\infty$, 使得

$$F(t,\omega)=\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}s,\forall t\geqslant 0$$

则存在一个适应的可测过程 $\widetilde{f}(t,\omega)$, 使得

$$F(t,\omega)=\int_0^t \widetilde{f}(s,\omega)\mathrm{d}s$$

且 $\forall t>0,\int_0^t |\widetilde{f}(s,\omega)|\mathrm{d}s<\infty$.

**证明** 如果 $f$ 为连续过程，则由

$$f(t,\omega)=\mathrm{l.i.m}_{\Delta\downarrow 0}\frac{F(t+\Delta,\omega)-F(t,\omega)}{\Delta} \tag{5-8}$$

以及 $(\mathcal{F}_t)$ 的右连续性，可见 $f_t\in\mathcal{F}_t$, 因此直接可取 $\widetilde{f}=f$.

现在讨论 $f$ 非连续情形．考虑连续过程序列

$$f_n(t,\omega)=n\int_0^t \mathrm{e}^{-n(t-s)}f(s,\omega)\mathrm{d}s$$

则可证明

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_0^T |f(t,\omega)-f_n(t,\omega)|\mathrm{d}t=0,\mathrm{a.s.} \tag{5-9}$$

事实上，容易算得

$$f_n^*(t)\triangleq n\int_0^t f(t)\mathrm{e}^{-n(t-s)}\mathrm{d}s=f(t)(1-\mathrm{e}^{-nt})$$

在 $(5-9)$ 式中用 $f_n^*(t)$ 换 $f_n(t,\omega)$, 则 $(5-9)$ 式的左边等于

$$\int_0^T |f(t)|\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t \to 0, (n \to \infty)$$

而由控制收敛定理

$$\begin{aligned}&\int_0^T |f_n(t) - f_n^*(t)|\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^T \int_0^t \mathrm{e}^{-n(t-s)}|f(s) - f(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \to 0\end{aligned}$$

$(5-9)$ 式得证. 于是, $\forall \epsilon > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\overline{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}}\, \lambda \times P\left(\{(t,\omega) : |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)| > \epsilon\}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\epsilon}E\, \overline{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}} \int_0^T |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

从而存在子列 $f_{n_k}(t,\omega)$ 使得

$$\underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, f_{n_k}(t,\omega) = f(t,\omega), \lambda \times P - \text{a.s.} \tag{5-10}$$

虽然下面将证明每个 $f_n \in \mathcal{F}_t$, 但不能由此得出 $\forall t, f(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$, 这因为 $(5-10)$ 式是 $\lambda \times P$a.s.. 记 $(5-10)$ 式极限存在的集合为 $E$, 令

$$\widetilde{f}(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega) & (t,\omega) \in E \\ \underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, f_{n_k}(t,\omega) & (t,\omega) \in E^c \end{cases}$$

显然 $\lambda \times P(\widetilde{f}(t,\omega) \neq f(t,\omega)) = 0$, 于是 $\forall t > 0$,

$$\int_0^t \widetilde{f}(s,\omega)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}s, P - \text{a.s.}$$

而且 $\int_0^t |\widetilde{f}(s,\omega)|\mathrm{d}s = \int_0^t |f(s,\omega)|\mathrm{d}s < \infty.P-$a.s. 下面证明 $\forall t, f_n(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$. 显然由 $F(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$, 可得

$$X_t^n = n\int_0^t \mathrm{e}^{-n(t-s)}F(s,\omega)\mathrm{d}s \in \mathcal{F}_t, \forall t$$

故

$$\dot{X}_t^n = -nX_t^n + nF(t,\omega)$$

由 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，可见 $\dot{X}_t^n \in \mathcal{F}_t$, 而容易算得

$$\begin{aligned}
\dot{X}_t^n &= n[F(t,\omega) - X_t^n] \\
&= n\left[\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}s - n\int_0^t \mathrm{e}^{-n(t-s)}\int_0^s f(u,\omega)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right] \\
&= n\left[\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}s - \int_0^t f(u,\omega)(n\int_u^t \mathrm{e}^{-n(t-s)\mathrm{d}s})\mathrm{d}u\right] \\
&= n\int_0^t \mathrm{e}^{-n(t-s)}f(s,\omega)\,\mathrm{d}s = f_n(s,\omega)
\end{aligned}$$

这表明 $\forall t, f_n(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$,，从而 $\widetilde{f}(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$. □

**定理 5.2 的证明**：先证若 $(g(t,\omega),\mathcal{F}_t)$ 可料，满足 $E\int_0^T g^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty$, $g^2 = g, P-$a.s., 且 $\int_0^T g(s,\omega)\mathrm{d}s = 0, P-$a.s., 则

$$\int_0^T g(t,\omega)\,\mathrm{d} < X,B >_t = 0, \text{ a.s..} \qquad (5-11)$$

为此，令 $Y_t = \int_0^t g(s,\omega)\mathrm{d}B_s$, 由 5.3 引理，

$$< X,Y >_t = \int_0^t g(s,\omega)\mathrm{d} < X,B >_s$$

但 $EY_t^2 = E\int_0^T g^2(s)\mathrm{d}s = E\int_0^T g(s)\mathrm{d}s = 0$, 故 $Y_t = 0, P\text{a.s.}$. 所以 $<X,Y>_t= 0$, (5 − 11) 式获证.

1) 证明存在 $\mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F}_T$ 可测过程 $f(t,\omega)$, 使得

$$<X,B>_t= \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}s \qquad (5-12)$$

引入符号测度

$$Q(S\times A) = \int_A\int_S \mathrm{d}<X,B>_s \mathrm{d}P \qquad (5-13)$$

容易证明 $Q \ll \lambda\times P$, 事实上, $P(A) = 0$, 则 $Q(S\times A) = 0$; 若 $\lambda(S) = 0$, 则可取 (5 − 11) 式中 $g(t,\omega) = I_S(t)$, 那么由 $\forall t, \int_0^t I_S(s)\mathrm{d}s = \lambda(S\cap[0,t]) = 0$, 可得 $Q(S\times A) = 0$. 由 Radon-Nikydom 定理, 存在 $f\in\mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F}_T$, 使得

$$Q(S\times A) = \int_A\int_S f(t,\omega)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}P \qquad (5-14)$$

由

$$\begin{aligned}|Q|([0,T]\times\Omega) &= E\int_0^T |\mathrm{d}<X,B>_u| \\ &\leqslant \sqrt{E\int_0^T \mathrm{d}<X>_u}\sqrt{T} < \infty\end{aligned}$$

故 $\int_\Omega\int_0^T |f(t,\omega)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}P < \infty$. 取 $S = [0,t]$ 以及 $A$ 的任意性, 则得

$$<X,B>_t= \int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}s, 0\leqslant s\leqslant T, P-\text{a.s.}$$

2) 应用 $F(t,\omega)=<X,B>_t$ 于 5.4 引理，则得一个 $(\mathcal{F}_t)$ 适应的可测过程 $a(t,\omega)$，满足 $\int_0^T |a(s,\omega)|\mathrm{d}s<\infty$，使得

$$<X,B>_t=\int_0^t a(s,\omega)\,\mathrm{d}s\text{a.s.},\forall t$$

3) 最后证明 $E\int_0^T a^2(s,\omega)\mathrm{d}s<\infty$.

置 $a_n(t,\omega)=a(t,\omega)I\{(t,\omega):|a(t,\omega)|<n\}$,

$$Y_n(t,\omega)=\int_0^t a_n(t,\omega)\,\mathrm{d}B_s$$

则它是平方可积鞅，由引理 5.4,

$$\begin{aligned}<X,Y_n>_t &=\int_0^t a_n(s,\omega)\mathrm{d}<X,B>_s\\ &=\int_0^t a_n(s,\omega)\frac{\mathrm{d}<X,B>_s}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\ &=\int_0^t a_n(s,\omega)a(s,\omega)\mathrm{d}s\\ &=\int_0^t a_n^2(s,\omega)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}0\leqslant E(X_T-Y_n(T,\omega))^2 &= EX_T^2+E\int_0^T a_n^2(s,\omega)\mathrm{d}s\\ -2EX_TY_n(T) &= EX_T^2-E\int_0^T a_n^2(s,\omega)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由此及 Fatou 引理得 $E\int_0^T a^2(s,\omega)\mathrm{d}s \leqslant EX_T^2 < \infty.$ □

**注意**！由 2.18 定理，在增补的意义下，我们可以认为定理 5.2 中的 $a(t,\omega)$ 是 $\widetilde{\mathcal{P}}$ 可料的过程.

## §5.2 平方可积鞅表示定理

首先介绍几个逼近定理.

**5.5引理** 设 $X$ 为 Polish 空间，$\mu$ 为 $(X,\mathcal{B}(X))$ 上的有限测度，则 $C_0(X)$ 在 $L^p(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 中稠密，其中 $C_0(X)$ 表示 $X$ 上具紧支集的连续函数全体，$0\leqslant p<\infty$. (文献 [3]th.5.1 ,pp.124)

**5.6引理** 任意的连续函数 $f\in C_0(R^n)$ 都可用 $\phi\in C_0^\infty(R^n)$ 一致逼近. (文献 [8]pp.25, 命题 8)

**5.7引理 (Lusin 定理)** 设 $X$ 为 Polish 空间，$\mu$ 为有限测度，$f$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 可测函数. 如果 $A\in\mathcal{B}(X),\mu(A)>0$, 则对任意的 $\epsilon>0$, 存在紧集 $K\subseteq A$, 使得 $\mu(A\backslash K)<\epsilon$, 且 $f|_K$ 连续，并且存在 $g\in C_0(X)$, 满足 $g|_K=f|_K$,

$$\sup\{|g(x)|:x\in K\}=\sup\{|f(x)|:x\in A\}$$

(文献 [3]pp124,th.5.2)

**5.8引理** 固定 $T>0$, 随机变量集合

$$\{\phi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}):t_i\in[0,T],\phi\in C_0^\infty(R^n),i\leqslant n=1,2,\cdots\}$$

在 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$ 中稠密.

其中 $(B_t)$ 为 Brownian 运动，$\mathcal{F}_T^B=\sigma(B_s,s\leqslant T)$.

**证明** 令 $\{t_i\}$ 为 $[0,T]$ 的稠密集, 则 $\mathcal{F}_n^B=\sigma(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})\uparrow\mathcal{F}_T^B$. 由鞅收敛定理, 对于任意的 $g\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$,$E(g|\mathcal{F}_n^B)\xrightarrow{L^2}g$.

而由 Doob 复合函数定理, 存在 $n$ 元 Borel 可测函数 $g_n(x_1,\cdots,x_n)$ 使得 $E(g|\mathcal{F}_n^B)=g_n(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$. 因为 $R^n$ 为 Polish 空间, $(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n})$ 的分布 $\mu_n$ 有限, 而由引理 5.5,5.6, 存在 $\phi_n\in C_0(R^n)$, 在 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$ 中逼近 $g$. □

**5.9逼近定理** 随机变量族 $\mathcal{H}=\{\mathrm{e}^{\int_0^T h(t)\mathrm{d}B_t-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)\mathrm{d}t}:h$为 $L^2([0,T])$ 中确定性函数 $\}$ 张成的线性空间为 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$.

**证明** 设 $g\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$, 且与 $\mathcal{H}$ 中一切函数, 也即与族 $\{\mathrm{e}^{\int_0^T h(t)\mathrm{d}t}:h\in L^2([0,T])\}$ 正交. 特别对一切 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),t_i\in[0,T]$ 有

$$G(\lambda)=\int_\Omega \mathrm{e}^{\lambda_1 B_{t_1}+\cdots+\lambda_n B_{t_n}}g(\omega)\mathrm{d}P=0$$

$G(\lambda)$ 可展开为关于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的幂级数, 因此是 $\lambda\in R^n$ 的实解析函数. 由文献 [7]ch.9,§4,$G(\lambda)$ 可开拓成 $C^n$ 上的解析函数

$$G(z)=\int_\Omega \mathrm{e}^{z_1 B_{t_1}+\cdots+z_n B_{t_n}}g(\omega)\,\mathrm{d}P=0$$

因为 $G(\lambda)$ 在 $R^n$ 上为 0, 由解析开拓定理可知 $G(z)$ 在 $C^n$ 上为 0, 特别有

$$\forall(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n,\ G(iy_1,\cdots,iy_n)=0,$$

记 $\phi\in C_0^\infty(R^n)$ 的福里埃变换为 $\hat{\phi}$, 即

$$\hat{\phi}(y)=2\pi^{-\frac{n}{2}}\in\int_{R^n}\phi(x)\mathrm{e}^{ixy}\mathrm{d}x$$

则

$$\phi(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\hat{\phi}(y)\mathrm{e}^{ixy}\mathrm{d}y$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\phi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})g(\omega)\mathrm{d}P\\
=&\int_{\Omega}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{R^n}\hat{\phi}(y)\mathrm{e}^{i(y_1B_{t_1}+\cdots+y_nB_{t_n})}\mathrm{d}y\right)g(\omega)\mathrm{d}P\\
=&(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\hat{\phi}(y)\left(\int_{\Omega}\mathrm{e}^{i(y_1B_{t_1}+\cdots+y_nB_{t_n})}g(\omega)\mathrm{d}P\right)\mathrm{d}y\\
=&(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\hat{\phi}(y)G(iy)\mathrm{d}y=0
\end{aligned}$$

可见 $g$ 与 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$ 中的稠密集正交，从而 $g\perp g$, 所以 $g=0$. 此即 $\mathcal{H}$ 所张成的线性空间即为 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$. □

下面记 $\overline{\mathcal{F}}_t^B$ 为 $\mathcal{F}_t^B$ 的完备化，亦即 $\overline{\mathcal{F}}_t^B$ 包含一切 $\mathcal{F}$ 零概集.

**5.10 Ito 表示定理** 设 $\xi\in L^2(\overline{\mathcal{F}}_T^B,P), B=(B^1,\cdots,B^n)$ 为 $n$ 维 Brownian 运动，则存在 $n$ 维过程 $(f(t,\omega),\mathcal{F}_t^B)$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n}E\int_0^T f_i^2(t,\omega)\mathrm{d}t<\infty$$

使得

$$\xi=E\xi+\int_0^T f(t,\omega)\cdot\mathrm{d}B_t \tag{5-15}$$

其中 $f(t,\omega)\cdot\mathrm{d}B_t=f_1(t,\omega)\mathrm{d}B_t^1+\cdots+f_n(t,\omega)\mathrm{d}B_t^n$, 而且如果 $(\xi,B)$ 联合正态，则 $f(t,\omega)$ 可取为确定性函数.

**证明** 只证 $n=1$ 情形. 首先设

$$\xi=\mathrm{e}^{\int_0^T h(s)\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)\mathrm{d}s},h\in L^2([0,T]) \tag{5-16}$$

令

$$Y_t(\omega) = \mathrm{e}^{\int_0^t h(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s}$$

则由 Ito 公式,

$$Y_t(\omega) = 1 + \int_0^t Y_s(\omega)h_s(\omega)\mathrm{d}B_s(\omega)$$

取 $t = T$, 则 $(5-15)$ 式对表达为 $(5-16)$ 式的 $\xi$ 成立. 对于一般的 $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T^B, P)$, 由逼近 5.9 定理, 存在形如 $(5-16)$ 式的线性组合 $\xi_n$ 均方逼近 $\xi$, 而

$$\xi_n = E\xi_n + \int_0^T f_n(s,\omega)\mathrm{d}B_s,\ E\int_0^T f_n^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty$$

由 Ito 同构

$$E(\xi_n - \xi_m)^2 = (E(\xi_n - \xi_m))^2 + E\int_0^T (f_n - f_m)^2\mathrm{d}s$$

后者, 当 $n,m \to \infty$ 时趋于 0, 于是存在 $f \in L^2([0,T]\times\Omega)$, 使得 $E\int_0^T (f_n - f)^2\mathrm{d}s \to 0$, 且有子列 $f_{n_k} \stackrel{\mathrm{d}P\times\mathrm{d}s}{\longrightarrow} f(t,\omega)$. 每个 $f_n \in \mathcal{F}_t$, 因此对几乎所有的 $t \in [0,T], f(t,\omega) \in \mathcal{F}_t$, 于是可将 $f$ 修正为 $\widetilde{f}$, 使得 $\forall t \in [0,T], \widetilde{f} \in \mathcal{F}_t$. 为简化记号, 仍记 $\widetilde{f}$ 为 $f$, 则 $f$ 是可测的适应过程.

$$\begin{aligned}\xi &= \mathrm{l.i.m}\xi_n = \mathrm{l.i.m}E\xi_n + \int_0^T f_n(s,\omega)\mathrm{d}B_s \\ &= E\xi + \int_0^T f(s,\omega)\mathrm{d}B_s\end{aligned}$$

表达式在 $dP \times dt$ 意义下是唯一的，事实上若有 $f_1, f_2$ 都满足 (5 − 15) 式则显然有 $f_1 = f_2, dP \times dt$−a.s.. 至于后部分的证明依赖下面的引理. □

**5.11引理 (广义逆矩阵)** 设 $A$ 为一矩阵， $A'$ 表示矩阵的转置，而称 $A^+$ 为矩阵 $A$ 的 **广义逆矩阵**，是指它满足

$$AA^+A = A,\ A^+ = UA' = A'V,$$

$$(AA^+)' = AA^+, (A^+A)' = A^+A \qquad (5-17)$$

式中 $U, V$ 是某矩阵. 对于任意的矩阵 $A$, 存在唯一的 $A^+$, 特别当 $A$ 为对称方阵时，则它表为 $A = P\Lambda_p P'$, 其中 $P$ 为正交阵，而 $\Lambda_p$ 为对角形，即 $\Lambda_p = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0), \lambda_i \neq 0$. 于是

$$A^+ = P\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_p^{-1}, 0, \cdots, 0)P' \qquad (5-18)$$

**证明** 先证唯一性. 设 $X, Y$ 都是 $A$ 的广义逆，相应地有 $U_1, V_1, U_2, V_2$, 记 $D = X - Y, U = U_1 - U_2, V = V_1 - V_2$, 则

$$ADA = 0,\ D = UA' = A'V$$

但 $D' = V'A$, 因此

$$(DA)'(DA) = A'D'DA = A'V'ADA = 0$$

故 $DA = 0$, 于是 $DD' = DAU' = 0$. 此即 $X = Y$.

往证存在性. 设 $A$ 为 $n \times m$ 矩阵，且 $\mathrm{rk}(A) = r \leqslant n \wedge m$. 记其 $r$ 个不相关的列构成的矩阵为 $B$， $A$ 的所有列可以用 $B$ 表示，于是有 $A = B \times C$, 其中 $B$ 为 $n \times r$ 矩阵， $C$ 为 $r \times m$ 矩阵. 令

$$A^+ = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B'$$

则容易证明 $A^+$ 满足 $(5-17)$ 式. 而当 $A=P\pi P'$ 时, 经计算直接可证 $(5-18)$ 式. □

**5.12引理(正态相关定理)** 设 $(\theta,\xi)=((\theta_1,\cdots,\theta_k),(\xi_1,\cdots,\xi_l))$ 为正态向量, 则

$$E(\theta|\xi)=m_\theta+D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^+(\xi-E\xi) \qquad (5-19)$$

$$\mathrm{Cov}(\theta,\theta|\xi)=D_{\theta\theta}-D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^+D_{\theta\xi}' \qquad (5-20)$$

其中

$$\begin{aligned} m_\theta &= E\theta, D_{\theta\theta}=\mathrm{Cov}(\theta,\theta), \\ D_{\theta,\xi} &= \mathrm{Cov}(\theta,\xi), D_{\xi\xi}=\mathrm{Cov}(\xi\xi), \end{aligned}$$

而

$$\mathrm{Cov}(\theta,\theta|\xi)\triangleq E\left[(\theta-E\left(\theta|\xi\right))(\theta-E\left(\theta|\xi\right))'|\xi\right]$$

**证明** 令

$$\eta=(\theta-m_\theta)+C(\xi-m_\xi) \qquad (5-21)$$

我们可选择矩阵 $C$ 使得

$$E\eta(\xi-m_\xi)'=0 \qquad (5-22)$$

即 $D_{\theta\xi}+CD_{\xi\xi}=0$. 事实上, 当对称矩阵 $D_{\xi\xi}$ 正定时, 取 $C=-D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{-1}$; 否则可取 $C=-D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^+$. 这是因为, 对

$$\epsilon=T^+(\xi-m_\xi),\ T=D_{\xi\xi}^{1/2}$$

则 $T$ 为对称矩阵, 我们有 $TT^+=T^+T=I_p$, 这里 $I_p$ 为前 $p$ 个对角线元素为 1 其余皆为 0 的矩阵. 而且

$$\begin{aligned} T(TT)^+TT &= TT^+T^+TT=TT^+(T^+T)'T \\ &= (TT^+)^2T=TT^+T=T \end{aligned}$$

而

$$D_{\theta\xi}D'_{\xi\xi}D_{\xi\xi} = EE(\theta - m_\theta)\epsilon' T(TT)^+TT = D_{\theta\xi}$$

$(5-22)$ 式得证. 同时有 $E\epsilon = 0$, 而且

$$E\,\epsilon\epsilon' = T^+T^2(T^+)' = T^+TTT^+ = I$$

因为 $(\theta, \xi)$ 为正态系, 则 $\eta$ 为正态变量, 且 $(\eta, \xi)$ 也是正态系. 这是因为 $(\eta, \xi)$ 的特征函数

$$\phi_{\eta,\xi}(z_1, z_2) = E\exp\{iz_1'[(\theta - m_\theta) + C(\xi - m_\xi)] + iz_2'\xi\}$$

仍然是正态系的特征函数.

由 $E\eta = 0$ 及 $E\eta(\xi - m_\xi)' = 0$ 可见 $\eta$ 与 $\xi$ 独立. 这样由 $(5-21)$ 式,

$$\begin{aligned} 0 &= E\eta = E(\eta|\xi) \\ &= E(\theta|\xi) - m_\theta - D_{\theta\xi}D^+_{\xi\xi}(\xi - m_\xi) \end{aligned}$$

这就证明了 $(5-19)$ 式.

注意到 $\eta = \theta - E(\theta|\xi)$, 而 $\xi$ 与 $\eta$ 独立, 故

$$\mathrm{Cov}(\theta, \theta|\xi) = \mathrm{Cov}(\eta, \eta|\xi) = E(\eta\eta')$$

而由 $(5-21)$ 式, 其中 $C = -D_{\theta\xi} + D^+_{\xi\xi}$, 我们有

$$\begin{aligned} E\eta\eta' &= D_{\theta,\theta} - D_{\theta\xi}D^+_{\xi\xi}D'_{\theta\xi} - D_{\theta\xi}D^+_{\xi\xi}D'_{\theta\xi} \\ &\quad + D_{\theta\xi}D^+_{\xi\xi}D_{\xi\xi}D^+_{\xi\xi}D'_{\theta\xi} \\ &= D_{\theta\theta} - D_{\theta\xi}D^+_{\xi\xi}D'_{\theta\xi} \end{aligned}$$

$(5-20)$ 式得证. □

Ito 表示定理后部分的证明: 设 $(\xi, B)$ 联合正态, 记 $\Delta = T2^{-n}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{T,n}^{B} &= \sigma(B: B_0, B_1, \cdots, B_T) \\ &= \sigma(B: B_\Delta - B_0, \cdots, B_{2^n}\Delta - B_{(2^n-1)\Delta}) \\ \mathcal{F}_T^B &= \sigma\left(\bigcup \mathcal{F}_{T,n}^B\right)\end{aligned}$$

则由前半部分的证明, $\xi = \text{l.i.m}\xi_n$. 由正态相关定理,

$$\begin{aligned}\xi_n &= E(\xi|\mathcal{F}_{T,n}^B) \\ &= E\xi + \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\Delta} E\left((\xi - E\xi)(B_{(k+1)\Delta} - B_{k\Delta})\right) \\ &= E\xi + \int_0^T f_n(s)\mathrm{d}B_s\end{aligned}$$

式中

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\Delta} E(\xi - E\,\xi)(B_{(k+1)\Delta} - B_{k\Delta}) I_{\{k\Delta \leqslant s \leqslant (k+1)\Delta\}}$$

为确定性函数. 显然

$$\int_0^T f_n^2(s)\mathrm{d}s \leqslant E(\xi - E\xi)^2 < \infty$$

而由随机积分的性质

$$\begin{aligned}&\underset{n,m\to\infty}{\text{l.i.m}} \int_0^T (f_n(s) - f_m(s))^2 \mathrm{d}s \\ =& \underset{n,m\to\infty}{\text{l.i.m}} E|\xi_n - \xi_m|^2 = 0\end{aligned}$$

于是存在 $f(s), \int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s < \infty$, 使得

$$\lim_n \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 \mathrm{d}s = 0$$

所以,

$$\xi = \mathrm{l.i.m}\xi_n = E\xi + \int_0^T f(s)\mathrm{d}B_s$$

□

下面是几个例子.

**例 1** 设 $\xi = \int_0^T B_s \mathrm{d}s$, 则 $(\xi, B)$ 联合正态, 且 $\xi = \int_0^T (T - t)\,\mathrm{d}B_t$.

事实上, 由 Ito 公式, $\mathrm{d}(tB_t) = B_t \mathrm{d}t + t\mathrm{d}B_t$. 所以, $\xi = TB_T - \int_0^T t\mathrm{d}B_t = \int_0^T (T-t)\mathrm{d}B_t$.

**例 2** 设 $\xi = B_1^4$, 则 $B_1^4 = 3 + \int_0^1 [12(1-t)B_t + 4B_t^3]\mathrm{d}B_t$. 事实上, 令

$$\begin{aligned}
X_t &\triangleq E(B_1^4|\mathcal{F}_t^B) = E(B_1^4|B_t) = E\left((B_1 - B_t + B_t)^4|B_t\right) \\
&= E\left((B_1 - B_t)^4|B_t\right) + 4E\left((B_1 - B_t)^3 B_t|B_t\right) \\
&\quad +6E(B_1 - B_t)^2 B_t^2|B_t + 4E\left((B_1 - B_t)B_t^3|B_t\right) + E(B_t^4|B_t) \\
&= 3(1-t)^2 + 6(1-t)B_t^2 + B_t^4
\end{aligned}$$

于是, 由

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}B_t^2 &= 2B_t\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t \\
\mathrm{d}B_t^4 &= 4B_t^3\mathrm{d}B_t + 6B_t^2\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= (-6(1-t)-6B_t^2)\mathrm{d}t + 12(1-t)B_t\mathrm{d}B_t + 6(1-t)\mathrm{d}t \\ &\quad +4B_t^3\mathrm{d}B_t + 6B_t^2\mathrm{d}t = (12(1-t)B_t + 4B_t^3)\mathrm{d}B_t\end{aligned}$$

从而

$$B_1^4 = x_1 = 3 + \int_0^1 \left(12(1-t)B_t + 4B_t^3\right)\mathrm{d}B_t$$

**5.13平方可积鞅表示定理** 设 $B=(B^1,B^2,\cdots,B^n)$ 为 $n$ 维 Brownian 运动, $(X_t,\overline{\mathcal{F}}_t^B)\in\mathfrak{M}_T^2$, 则存在唯一的 $n$ 维可测的适应过程 $(g(t,\omega),\mathcal{F}_t^B)$, 其每个分量满足

$$E\int_0^T g_i^2(t,\omega)\mathrm{d}t < \infty \qquad (5-23)$$

使得

$$X_t = X_0 + \int_0^T g(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s \qquad (5-24)$$

**证明** 只对 $n=1$ 给出证明. 应用 Ito 表示 (5.10) 定理于 $T=t,\xi=X_t$, 则存在 $(f^t(s,\omega),\mathcal{F}_s^B)$, 使得

$$X_t(\omega) = EX_0 + \int_0^t f^t(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

式中 $E\int_0^t |f^t(s,\omega)|^2\mathrm{d}s<\infty$. 设 $0\leqslant t_1<t_2$, 则

$$\begin{aligned}X_{t_1} &= E(X_{t_2}|\mathcal{F}_{t_1}^B) \\ &= EX_0 + E\left[\int_0^{t_2} f^{t_2}(s,\omega)\mathrm{d}B_s|\mathcal{F}_{t_1}^B\right] \\ &= EX_0 + \int_0^{t_1} f^{t_2}(s,\omega)\mathrm{d}B_s\end{aligned}$$

但我们仍然有

$$X_{t_1}(\omega) = EX_0 + \int_0^{t_1} f^{t_1}(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[\int_0^{t_1} (f^{t_2}(s,\omega) - f^{t_1}(s,\omega))\mathrm{d}B_s\right]^2 \\ &= \int_0^{t_1} E(f^{t_2} - f^{t_1})^2 \mathrm{d}s \end{aligned}$$

从而 $f^{t_1}(s,\omega) = f^{t_2}(s,\omega), \mathrm{d}t \times \mathrm{d}P$a.s.. 定义 $f(s,\omega) = f^N(s,\omega), 0 \leqslant s \leqslant N$, 则

$$X_t = EX_0 + \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s,\ t \geqslant 0$$

□

现在推广平方可积鞅的表示定理.

**5.14定理** 设 $X = (X_t, \overline{\mathcal{F}}_t^B)$, 为右连续局部鞅, 则它的轨道 a.s. 连续, 且存在 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t$a.s. 唯一的 $(f(t,\omega), \mathcal{F}_t^B)$, 满足

$$P\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \tag{5-25}$$

使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s, \tag{5-26}$$

**证明** 其实我们只要证明对于某局部化序列 $\tau_k$, 我们有

$$X_t^{\tau_k} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau_k} f(s,\omega)\mathrm{d}B_s, \forall k \tag{5-26'}$$

适当选取局部化序列，不妨假定 $(X_t, \overline{\mathcal{F}}_t^B)$ 为一致可积鞅 (见 2.12 定义)，于是存在 $X_\infty \in L(\mathcal{F}_\infty^B)$(其实就是某 $X_\infty^{\tau_k}$), 于是存在随机变量序列 $(\xi_n) \subseteq L^2(\mathcal{F}_\infty)$, 使得 $E|X_\infty - \xi_n| \to 0$. 于是可选 $(\xi_n)$ 的子列，不妨仍记为 $\xi_n$, 使得

$$E|X_\infty - \xi_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

对固定的 $n$, 记 $X_t^n$ 为鞅 $E(\xi_T^n|\mathcal{F}_t^B)$ 的右连续修正，则 $X_t^n \in \mathfrak{M}^2$. 由 5.13 定理，存在 $(\widetilde{f}_n(s,\omega), \mathcal{F}_s^B)$, 满足

$$E\int_0^\infty \widetilde{f}_n^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty$$

使得

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t \widetilde{f}_n^2(s,\omega)\mathrm{d}B_s \tag{5-27}$$

这表明 $X_t^n$ 有连续修正，不妨假定这个修正就是其本身. 由鞅的极大不等式

$$P\left(\sup_{0\leqslant t<\infty}|X_t - X_t^n| > \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{\epsilon}E|X_\infty - X_\infty^n| < \frac{1}{\epsilon n^2}$$

由 Borel-Cantelli 引理， $X_t^n$ 一致收敛到 $X_t$, 因此 $X_t$ 也是连续函数. 记停时

$$\tau_n = \inf\{t \leqslant T : |X_t| \geqslant n\} \wedge T$$

则 $(s \leqslant \tau_n) = \{\sup_{t\leqslant s}|X_t| \leqslant n\}$, 停止过程 $X_n(t) \triangleq X_{t\wedge\tau_n}$ 仍是鞅，而且 $\sup_{t\leqslant T}|X_{t\wedge\tau_n}| \leqslant n$. 由定理 5.13, 存在 $(f_n(s,\omega), \mathcal{F}_s^B)$, 满

足 $E\int_0^T f_n^2(s,\omega)\mathrm{d}s<\infty,\forall n$

$$X_n(t)=X_n(0)+\int_0^t f_n(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

注意到对 $m\geqslant n,\tau_m\leqslant\tau_n$, 所以 $X_m(t\wedge\tau_n)=X_n(t)$ 而且

$$\begin{aligned}X_m(t\wedge\tau_n)&=X_m(0)+\int_0^{t\wedge\tau_n} f_m(s,\omega)\mathrm{d}B_s\\&=X_n(0)+\int_0^t f_m(s,\omega)I_{\{\sup_{u\leqslant s}|X_u|\leqslant n\}}\mathrm{d}B_s\end{aligned}$$

所以 $P$a.s. 有

$$\int_0^T\left(f_m(s,\omega)I_{\{\sup_{u\leqslant s}|X_u|\leqslant n\}}-f_n(s,\omega)\right)^2\mathrm{d}s=0$$

于是在 $\{(t,\omega):\sup_{u\leqslant t}|X_u(\omega)|\leqslant n\}$ 上, $f_n=f_{n+1}=\cdots=f_m$.

令

$$f(t,\omega)=\begin{cases}f_1(t,\omega), & \sup_{u\leqslant t}|X_u|\leqslant 1\\ f_2(t,\omega), & 1<\sup_{u\leqslant t}|X_u|\leqslant 2\\ \cdots\end{cases}$$

可见 $\forall t,f(t,\omega)\in\mathcal{F}_t^B$.

$$\begin{aligned}\{\omega:\int_0^T f^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t=\infty\}&\subseteq\{\omega:f(t,\omega)\neq f_n(t,\omega),\forall n\}\\&\subseteq\{\omega:\int_0^T(f-f_n)^2\,\mathrm{d}t>0,\forall n\}\\&\subseteq\bigcap_n\{\omega:\sup_{t\leqslant T}|X_t|>n\}\end{aligned}$$

而由过程 $X_t$ 的连续性,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant T}|X_t|>n\right)=0$$

因此 $P\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\mathrm{d}s<\infty\right)=1$, 于是可定义

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

令

$$\widetilde{X}_t=X_0+\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

由不等式

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t(f(s,\omega)-f_n(s,\omega))\mathrm{d}B_s\right|>\epsilon\right)$$
$$\leqslant P\left(\int_0^T|f-f_n|^2\mathrm{d}s>\delta\right)+\frac{\delta}{\epsilon^2}$$

从而 $X_n(t)\xrightarrow{P}\widetilde{X}_t$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(t)=X_t(\omega)$, 因而

$$X_t=X_0+\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

唯一性可由 Ito 同构得证. □

当 $B=(B^1,B^2,\cdots,B^n)$ 为 $n$ 维 Brownian 运动时, 我们有

$$X_t=X_0+\sum_{i=1}^n\int_0^t f_i(s,\omega)\mathrm{d}B^i(s) \qquad (5-28)$$

其中

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t f_i(s,\omega)\mathrm{d}s<\infty\right)=1$$

**注意**！我们还可要求定理中的 $g\in\mathcal{P}$, 也即对于局部鞅 $(X_t,\mathcal{F}_t^B)$, $t\geqslant 0$, 可以找到可料过程 $g$ 使得

$$X_t=X_0+\int_0^T g(s,\omega)\mathrm{d}B_s \tag{5-29}$$

此即文献 [1] 中所称的 Brownian **运动的可料表示性**. 事实上, 令 $\mathcal{N}$ 为 $\mu_{B^2}=\lambda\times P$ 零测集全体, $\widetilde{\mathcal{P}}=\sigma(\mathcal{P}\cup\mathcal{N})$. 则由 2.19 引理, $g\in\widetilde{\mathcal{P}}$, 而由 2.18 引理存在 $\widetilde{g}\in\mathcal{P}$, 使得

$$\mu_{B^2}(g\neq\widetilde{g})=0,\text{也即}\lambda\times P(g\neq\widetilde{g})=0$$

于是

$$\int_0^t \widetilde{g}(s,\omega)\mathrm{d}B_s=\int_0^t g(s,\omega)\mathrm{d}B_s \tag{5-30}$$

所以, Brownian 运动具有可料表示性.

下面是 5.14 定理的推论.

**5.15推论** 设 $\xi\in\mathcal{F}_T^B, E|\xi|<\infty$, 并令 $E(\xi|\mathcal{F}_t^B)$ 为其右连续修正, 则存在 $(f(t,\omega),\mathcal{F}_t^B)$, 满足 $P\left(\int_0^T f^2(t,\omega)\mathrm{d}t<\infty\right)=1$, 使得

$$E(\xi|\mathcal{F}_t^B)=E\xi+\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s,\forall t\leqslant T \tag{5-31}$$

特别有

$$\xi=E\xi+\int_0^T f(t,\omega)\mathrm{d}B_t \tag{5-32}$$

对于 a.s. 为正的 Brownian 运动泛函，我们有更进一步的表达.

**5.16定理** 设 $\xi \in \mathcal{F}_T^B, P(\xi > 0) = 1, E\xi < \infty$, 则存在过程 $(\phi(t,\omega), \mathcal{F}_t^B), t \leqslant T$ 使得

$$E(\xi|\mathcal{F}_t^B) = \exp\left\{\int_0^t \phi(s,\omega)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s,\omega)\mathrm{d}s\right\} \qquad (5-33)$$

特别

$$\xi = E\xi \cdot \exp\left\{\int_0^T \phi(s,\omega)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^T \phi^2(s,\omega)\mathrm{d}s\right\} \qquad (5-34)$$

**证明** 设 $X_t = E(\xi|\mathcal{F}_t^B)$ 为右连续鞅，则由 5.15 定理，存在 $f(t,\omega) \in \mathcal{F}_t^B$, 满足 $P\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$ 使得

$$X_t = E\xi + \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s \qquad (5-35)$$

往证

$$P\left(\inf_{t\leqslant T} X_t > 0\right) = 1 \qquad (5-36)$$

因为鞅 $(X_t, \mathcal{F}_t^B)$, 是右闭鞅，由 Doob 停止定理，对任意的停时 $\tau$,

$$X_\tau = E(\xi|\mathcal{F}_\tau^B) \qquad (5-37)$$

令 $\tau = \inf\{t \leqslant T : X_t = 0\}$(归零时)，则在 $(\tau \leqslant T) = (\inf_{t\leqslant T} X_t = 0)$ 上， $X_\tau = 0, (\because X_t$ 右连续). 由 (5 − 36) 式， $(\tau \leqslant T) \in \mathcal{F}_\tau^B$, 故

$$0 = \int_{(\tau\leqslant T)} X_\tau \mathrm{dP} = \int_{(\tau\leqslant T)} \xi \mathrm{dP}$$

但 $P(\xi>0)=1$, 因此必 $P(\tau\leqslant T)=0$, 即 $P(\inf\limits_{t\leqslant T}X_t>0)=1$, 这样我们可令

$$\phi(t,\omega)=\frac{f(t,\omega)}{X_t}\equiv\frac{f(t,\omega)}{E\xi+\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s}$$

显然 $P\left(\int_0^T\phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t<\infty\right)=1$. 由

$$\mathrm{d}X_t=f(t,\omega)\mathrm{d}B_t=X_t\phi(t,\omega)\mathrm{d}B_t, X_0=E\xi \qquad (5-38)$$

解得

$$X_t=E\xi\cdot\exp\left\{\int_0^t\phi(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t\phi^2(s,\omega)\mathrm{d}s\right\} \qquad (5-39)$$

它是 (5 − 38) 式的强解. 如果它还有另解 $Y_t$, 则由 Ito 公式, $d\left(\frac{Y_t}{X_t}\right)=0$, 于是 $P(X_t=Y_t)=1,\forall t\leqslant T$, 再由解的连续性可知 $P(X_t=Y_t,\forall t\leqslant T)=1$. □

## §5.3 条件期望鞅的表示与随机 Fubini 定理

设 $(\mathcal{F}_t)$ 为右连续子 $\sigma$ 代数族, $X=(X_t,\mathcal{F}_t)$, 为右连续鞅, 令 $Y_t=E(X_t|\mathcal{F}_t^B)$. 显然过程 $Y=(Y_t,\mathcal{F}_t^B),t\leqslant T$ 为鞅, 我们称为**条件期望鞅**, 且当 $X$ 平方可积时, $Y$ 也平方可积.

**5.17定理** 设 $X$ 为平方可积鞅, 则存在 $a=(a_s,\mathcal{F}_s),s\leqslant T$ 使得

$$Y_t=EX_0+\int_0^t E(a_s|\mathcal{F}_s^B)\mathrm{d}B_s \qquad (5-40)$$

且

$$< X, B >_t = \int_0^t a_s \mathrm{d}s, \int_0^T E a_s^2 \,\mathrm{d}s < \infty \tag{5-41}$$

**证明** 首先 $Y_0 = E(X_0|\mathcal{F}_0^B) = EX_0$,a.s.. 因为 $(Y_t, \mathcal{F}_t^B)$, 是平方可积鞅, 由鞅表示 5.13 定理, 存在 $f = (f(s,\omega), \mathcal{F}_s^B), s \leqslant T$ 满足 $\int_0^T Ef_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty$, 使得

$$Y_t = EX_0 + \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}B_s \tag{5-42}$$

由 5.2 定理存在随机过程 $a = (a_s, \mathcal{F}_s)$, 满足 $\int_0^T Ea_s^2\mathrm{d}s < \infty$, 使

$$< X, B >_t = \int_0^t a_s \mathrm{d}s$$

往证 (5−42) 式中 $f_s(\omega) = E(a_s|\mathcal{F}_s^B)$,a.s.. 为此令 $g = (g_s, \mathcal{F}_s^B)$ 是任意的有界过程, 满足 $\int_0^T g^2(t,\omega)\mathrm{d}t < \infty$,a.s.. 令 $Z_t = \int_0^t g_s(\omega)\mathrm{d}B_s$, 则

$$EY_tZ_t = E(E(X_t|\mathcal{F}_t^B)Z_t) = EX_tZ_t \tag{5-43}$$

而由 (5 − 42) 式

$$EY_tZ_t = \int_0^T E(f_s(\omega)g_s(\omega))\mathrm{d}s \tag{5-44}$$

而

$$\begin{aligned} EX_tZ_t &= E < X, Z >_t = E\int_0^t g_s(\omega)a_s(\omega)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t E\left[E(a_s|\mathcal{F}_s^B)g_s(\omega)\right]\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5-45}$$

由以上 (5-43) 式 ~(5-45) 式，得到

$$\int_0^t E\left\{\left[f_s(\omega)-E(a_s|\mathcal{F}_s^B)\right]g_s(\omega)\right\}\mathrm{d}s=0$$

由 $g_s(\omega)$ 的任意性，可见对 a.s. 的 $s\leqslant T$ 有

$$f_s(\omega)=E(a_s|\mathcal{F}_s^B),P-\text{a.s.}$$

□

下面的推论表明期望与积分在一定条件下的可换性.

**5.18推论** 设 $X=(X_t,\mathcal{F}_t)$, 是零初值平方可积鞅

$$X_t=\int_0^t a(s,\omega)\mathrm{d}B_s \tag{5-46}$$

其中 $E\int_0^T a^2(s,\omega)\mathrm{d}s<\infty$, 则 $\forall 0\leqslant t\leqslant T$,

$$E\left\{\int_0^t a(s,\omega)\mathrm{d}B_s|\mathcal{F}_s^B\right\}=\int_0^t E(a_s|\mathcal{F}_s^B)\mathrm{d}B_s \tag{5-47}$$

**证明** 由 (5 − 46) 式，得

$$<X,B>_t=\int_0^t a(s,\omega)\mathrm{d}s$$

因此由 (5 − 39) 式，及 $EX_0=0$ 得到

$$E(X_t|\mathcal{F}_t^B)=Y_t=\int_0^t E(a_s|\mathcal{F}_s^B)\mathrm{d}B_s$$

□

**5.19推论** 设 $W=(W_t,\mathcal{F}_t),\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t,\mathcal{F}_t)$, 是两个独立的 Brownian 运动，并设

$$X_t=\int_0^t a_s\mathrm{d}\widetilde{W}_s,\int_0^T Ea_s^2\mathrm{d}s<\infty$$

则

$$E\left[\int_0^t a_s\mathrm{d}\widetilde{W}_s|\mathcal{F}_s^W\right]=0 \tag{5-48}$$

**证明** 由 5.18 推论，只要证 $\forall t,<X,W>_t=0$a.s.. 而由

$$X_t\pm W_t=\int_0^t a_s\mathrm{d}\widetilde{W}_t\pm W_t$$

故 $<X\pm W>_t=\int_0^t(a_s^2+1)\mathrm{d}s$, 所以 $<X,W>=0$. □

利用局部化技术不难证明下面的定理：

**5.20定理** 设 $X=(X_t,\mathcal{F}_t)$, 为鞅,

$$X_t=\int_0^t a_s\,\mathrm{d}B_s,P\left(\int_0^T a_s^2\mathrm{d}s<\infty\right)=1 \tag{5-49}$$

如果 $E|a_s|<\infty,0\leqslant s\leqslant T$, 且

$$P\left(\int_0^T\left[E(|a_s||\mathcal{F}_s^B)\right]^2\mathrm{d}s<\infty\right)=1 \tag{5-50}$$

则 $\forall t\leqslant T$,a.s. 有

$$E\left(\int_0^t a_s\mathrm{d}B_s|\mathcal{F}_s^B\right)=\int_0^t E(a_s|\mathcal{F}_s^B)\mathrm{d}B_s \tag{5-51}$$

## §5.4 扩散过程泛函的结构

鞅表示 5.13 定理给出了 Brownian 运动泛函的结构，现在讨论所谓扩散过程泛函的结构. 设 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, 是扩散过程，即它满足

$$d\xi_t = a_t(\xi)dt + b_t(\xi)dB_t \tag{5-52}$$

而 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi)$, 是一个扩散过程泛函. 我们要证明此 $X$ 可表达为

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\omega)dB_s$$

开始讨论特殊情形.

**5.21定理** 设过程 $\xi$ 满足

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b_s(\xi)dB_s \tag{5-53}$$

这里适应可测泛函 $b = (b_t(\xi), \mathcal{B}_t)$, 满足 $P\left(\int_0^T b_t^2(\xi)dt < \infty\right) = 1$,

且

$$b_t^2(\xi) \geqslant c > 0 \tag{5-54}$$

$\mathcal{B}_t = \sigma(x : x \in C([0,T]), x_s, s \leqslant t)$, 那么鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi)$, 有一个连续的修正，且

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s(\omega)dB_s \tag{5-55}$$

其中 $f = (f_s(w), \mathcal{F}_s^\xi)$ 满足

$$P(\int_0^T f_s^2(\omega)ds < \infty) = 1 \tag{5-56}$$

如果鞅 $X$ 平方可积，则

$$E\int_0^T f_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty \qquad (5-57)$$

**证明** 1) 首先假设 $\mathcal{F}_t^\xi$ 已经完备化，并证明它是连续的．令

$$\mathcal{F}_t^{\xi_0,B} = \mathcal{F}_0^\xi \bigvee \mathcal{F}_t^B$$

由于 $\xi_t$ 是方程 $(5-52)$ 的强解，故 $\mathcal{F}_t^\xi \subseteq \mathcal{F}_t^{\xi_0,B}$．另一方面，由 $(5-53)$ 式、$(5-54)$ 式，

$$B_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\xi_s}{b_s(\xi)}$$

可见 $\mathcal{F}_t^{\xi_0,B} = \mathcal{F}_t^\xi$, 由 3.14 引理，$\sigma$ 代数 $\mathcal{F}_t^B$ 连续．故 $\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^{\xi_0,B}$ 连续，更是右连续的，于是鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^{\xi_0,B})$ 有右连续修正．

2) 假定 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ 是平方可积鞅,容易验证 $(B_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$ 也是 Brownian 运动．于是由 5.2 定理，存在 $f = (f_s, \mathcal{F}_s^\xi), s \leqslant T$, 满足 $E\displaystyle\int_0^T f_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty$, 使得

$$< X, B >_t = \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}s \qquad (5-58)$$

令

$$\widetilde{X}_t = X_0 + \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}B_s$$

往证 $\widetilde{X}_t = X_t, P-$a.s..$\forall t \leqslant T$, 因为 $\widetilde{X}_t \in \mathcal{F}_t^{B,\xi_0}$, 可见 $\widetilde{X}_t - X_t \in \mathcal{F}_t^{\xi_0,B}$．因为 $\widetilde{X}_t - X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t^{\xi_0,B}, P)$, 由 5.9 逼近定理，我们只

要证

$$E(\widetilde{X}_t - X_t)\exp\left\{\int_0^t h(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s\right\} = 0 \qquad (5-59)$$

记 $Z_t = \exp\left\{\int_0^t h(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s\right\}$, 其中 $\int_0^T h^2(s)\mathrm{d}s < \infty$. 由 Ito 公式

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s h(s)\,\mathrm{d}B_s$$

于是

$$E\widetilde{X}_t Z_t = EX_0 + \int_0^t Z_s h(s) f_s(\omega)\mathrm{d}s$$

而由 5.3 引理,

$$\begin{aligned} EX_t Z_t &= EX_0 + \int_0^t Z_s h(s)\mathrm{d} < X, B >_s \\ &= EX_0 + \int_0^t Z_s h(s) f_s(\omega)\mathrm{d}s \end{aligned} \qquad (5-60)$$

从而 $E(\widetilde{X}_t - X_t)^2 = 0$, 故 $\forall t \leqslant T, X_t = \widetilde{X}_t, P-$ a.s.. 于是 (5 − 59) 式在 $X$ 为平方可积鞅情形定理得证, 在非平方可积鞅情形可仿照 5.14 定理的证明. □

现在讨论较一般情形的扩散泛函.

**5.22定理** 设扩散过程 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t), t \leqslant T$ 满足

$$\mathrm{d}\xi_t = a_t(\xi)\mathrm{d}t + b_t(\xi)\mathrm{d}W_t \qquad (5-61)$$

其中适应泛函 $a = (a_t(x), \mathcal{B}_t(x)), b = (b_t(x), \mathcal{B}_t(x))$ 满足 Lipschitz 条件与线性增长条件, 且 $\forall t \leqslant T$,

$$b_t^2(x) \geqslant C > 0 \qquad (5-62)$$

而且

$$P\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = P\left(\int_0^T a_t^2(\eta)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \qquad (5-63)$$

其中 $\eta$ 为扩散过程的强解:

$$\mathrm{d}\eta_t = b_t(\eta)\mathrm{d}W_t, \eta_0 = \xi_0 \qquad (5-64)$$

则对任意的扩散泛函鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$ 有连续的修正，且可表示为

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}W_s \qquad (5-65)$$

这里 $(f_s(\omega), \mathcal{F}_s^\xi)$ 满足

$$P\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$$

如 $X$ 平方可积，则

$$\int_0^T Ef_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty$$

**证明** 将 6.18 定理, 应用于此, 注意到此时 $A_t(x) \equiv 1, B_t(x) = b_t(x) \geqslant C > 0$, 而条件 (5 − 63) 式表明那里的条件 (6 − 87) 式成立，于是 $\mu_\xi \sim \mu_\eta$, 密度

$$z_t(\xi) = \frac{\mathrm{d}\mu_\eta}{\mathrm{d}\mu_\xi}(t, \xi)$$

由 (6 − 85) 式,

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\eta}{\mathrm{d}\mu_\xi}(\xi) = \exp\Big\{-\int_0^T (b_s^{-1}(\xi))^2[a_s(\xi) - A_s(\xi)]\mathrm{d}\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^T (b_s^{-1}(\xi))^2[a_s^2(\xi) - A_s^2(\xi)]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$= \exp\Big\{-\int_0^T (b_s^{-1}(\xi))a_s(\xi)\mathrm{d}\Omega_s - \frac{1}{2}\int_0^T (b_s^{-1}(\xi))^2 a_s^2(\xi)\,\mathrm{d}s\Big\} \qquad (5-66)$$

引入测度

$$\mathrm{d}\widetilde{P} = Z_T(\xi)\mathrm{d}P$$

显然 $P \sim \widetilde{P}$. 由于 $\forall\Gamma \in \mathcal{B}_T$,

$$\widetilde{P}(\xi \in \Gamma) = \int_{\omega:\xi\in\Gamma} Z_T(\xi)\mathrm{d}P = \int_\Gamma Z_T(x)\,\mathrm{d}\mu_\xi = \mu_\eta(\Gamma)$$

可见 $\xi$ 在测度 $\widetilde{P}$ 下与 $\eta$ 在测度 $P$ 下同分布. 由 Girsanov 定理

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t a_s(\xi)b_s^{-1}(\xi)\mathrm{d}s$$

是 $\widetilde{P}$−Wiener 过程. 而

$$\xi_0 + \int_0^t b_s(\xi)\mathrm{d}\widetilde{W}_s = \xi_0 + \int_0^t a_s(\xi)\mathrm{d}s + \int_0^t b_s(\xi)\mathrm{d}W_s = \xi_t$$

所以 $\xi$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ 上与 $\eta$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上服从同样方程 (5 − 64). 由 Lipschitz 条件, 方程 (5 − 64) 存在唯一的强解. 于是由 5.21 定

理，可知在$(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ 上定义的所有的鞅 $Y=(Y_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ 都有连续的修正，且可表示为

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t g_s(\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_s, t \leqslant T \tag{5-67}$$

而且 $\widetilde{P}\left(\int_0^T g_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1.$

设 $(X_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ 为鞅，往证： $Y_t = \dfrac{X_t}{Z_t(\xi)}$ 是 $\widetilde{P}-$ 鞅，

事实上，

$$\begin{aligned}\widetilde{E}|Y_t| &= E\frac{|X_t|}{Z_t(\xi)}Z_T(\xi) = E\left[\frac{|X_t|}{Z_t(\xi)}E(Z_T(\xi)|\mathcal{F}_t^\xi)\right] \\ &= E|X_t| < \infty\end{aligned}$$

对 $t \geqslant s$, 由 Bayes 法则，

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(Y_t|\mathcal{F}_s^\xi) &= Z_s^{-1}(\xi)E(Y_t Z_t(\xi)|\mathcal{F}_s^\xi) \\ &= Z_s^{-1}(\xi)E(X_t|\mathcal{F}_s^\xi) = \frac{X_s}{Z_s(\xi)} = Y_s\end{aligned}$$

从而由 (5 − 67) 式， $\widetilde{P}$ 鞅 $(Y_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ 可表示为

$$\begin{aligned}Y_t \triangleq \frac{X_t}{Z_t(\xi)} &= Y_0 + \int_0^t g_s(\omega)\mathrm{d}\widetilde{W}_s \\ &= X_0 + \int_0^t g_s(\omega)\mathrm{d}W_s + \int_0^t g_s(\omega)a_s(\omega)b_s^{-1}(\xi)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

注意到由 (5 − 66) 式， $\mathrm{d}Z_t(\xi) = -Z_t(\xi)b_s^{-1}(\xi_s(\xi))\mathrm{d}W_t$, 应用 Ito 公式，求 $\mathrm{d}X_t$ ，我们有

$$\mathrm{d}X_t = f_t(\omega)\mathrm{d}W_t \tag{5-68}$$

其中 $f_t(\omega) = Z_t(\xi)g_t(\omega) - X_t a_t(\xi)b_t^{-1}(\xi)$.

换言之,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}W_s$$

这里 $P\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$, 它可从过程 $Z_t(\xi)$ 及 $X_t = Z_t(\xi)z_t$ 的连续性以及

$$P\left(\int_0^T g_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = P\left(\int_0^T (a_t(\xi)b_t^{-1}(\xi))^2\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$$

得到. 最后只需证明如果 $X$ 为平方可积鞅, 则

$$\int_0^T Ef_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty \qquad (5-69)$$

事实上, $(5-69)$ 式是 $X_t = \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}W_s$ 为平方可积鞅的充要条件, 读者可补证之. □

**5.23推论** 在上述定理中, 若 $b_t(x) \equiv 1$, 则在

$$P\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$$

的条件下, 任意的扩散泛函鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$ 有连续的修正, 且可表示为

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s(\omega)\mathrm{d}W_s \qquad (5-70)$$

这里 $(f_s(\omega), \mathcal{F}_s^\xi)$ 满足

$$P\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$$

如 $X$ 平方可积，则

$$\int_0^T Ef_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty$$

**证明**　由 $b_t(x) \equiv 1$, 则 (5−62) 式成立. 而 $P\left(\int_0^T \mathcal{A}_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right)$ $= 1$ 以及 $\mu_\xi \sim \mu_\eta$, 表明 $(5-63)$ 式成立. 因此，由 5.22 定理则得推论的成立. □

**5.24注:**　若将 5.22 定理中的条件 (5-63) 式用条件 $P(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)$ $\mathrm{d}t < \infty) = 1$ 代替，则 5.22 定理的结论仍然成立.

**证明**　见文献 [2] 之 th.5.18. □

**5.25定理**　设扩散过程 $\xi$ 满足 $\mathrm{d}\xi_t = \alpha_t(\xi)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0$, 而 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$ 为 Gauss 鞅，$(W, \xi, X)$ 联合正态，且

$$P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \tag{5-71}$$

则鞅 $X$ 有连续的修正，且存在确定性函数 $f$ 满足

$$\int_0^T f^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$$

使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s, t \leqslant T \tag{5-72}$$

**证明**　见文献 [2] 之 th.5.21. □

# §5.5 欧式期权的定价 —— Black-Scholes 公式

现在我们接着 §3.4 的讨论，介绍期权定价的 Black-Scholes 公式.

由 $(3-35)$ 式，欧式期权的价格 $C_0(\mu, f_T)$, 就是有可能达到 $f_T$ 的最小的初始投入.

设 $\theta \in \mathrm{SF}^+$(可取策略)，则由 3.19 定理 (3) 可知,

$$x \triangleq V_0^\theta \geqslant E^*\{\mathrm{e}^{-rT}V_T^\theta(\mu,\omega)\}$$

其中 $V^\theta$ 是在投资策略 $\theta$ 下的资本过程. 如果 $\theta$ 还是一个 $(\mu, x, f, T)$ 保值策略，则

$$x \geqslant E^*\{\mathrm{e}^{-rT}f_T(\omega)\}$$

因此由 $(3-35)$ 式,

$$C_0(\mu, f_T) \geqslant E^*(\mathrm{e}^{-rT}f_T(\omega)) \qquad (5-73)$$

这里 $E^*$ 是关于等价鞅测度 $P^*$ 的期望. 因为欧式的未定权益 $f_T \in \mathcal{F}_T = \sigma(W_s, s \leqslant T)$. 因此，它是 Wiener 可测泛函，于是可表为

$$f_T(\omega) = \phi_T(W)$$

其中 $\phi_T$, 是定义在 $(C_T, \mathcal{B}_T)$ 上的可测实值函数. 由于 $S_t(\mu)$ 与 $W_t$ 可以互相表示因此 $\mathcal{F}_t^{S(\mu)} = \sigma(S_u(\mu) : u \leqslant t) = \mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^W$, 故 $f_T$ 可以表示为 $\psi_T(S(\mu))$, 也即为过程 $(S_t(\mu))_{t\geqslant 0}$ 的泛函. 但是，值得注意的是这里的 $\psi_T$ 一般地依赖于 $\mu$. 特别当这个 $\psi_T$ 与 $\mu$ 无关时，称这个未定权益 (也可称为 **报酬函数**) 为 **自然的未定权益**(或 **自然的报酬函数**). 由 $(3-34)$ 式，可见对于自然的未定权益，有

$$\mathrm{Law}(\psi_T(S(\mu,\omega))|P^*) = \mathrm{Law}(\psi_T(S(r,\omega))\big|P) \qquad (5-74)$$

由 (5 − 73) 式，我们得到对任意的 $\mu \in R$,

$$C_0(\mu, f_T) \geqslant E(e^{-rT}\psi_T(S(r,\omega))) \qquad (5-75)$$

**5.26定理** (1) 设未定权益 $f_T \in \mathcal{F}_T^+$, 且存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$Ef_T^{1+\epsilon}(\omega) < \infty \qquad (5-76)$$

则欧式期权的价格

$$C_0(\mu, f_T) = E^* e^{-rT} f_T(\omega) \qquad (5-77)$$

并且存在一个最小的 $(\mu, x, f, T)$ 保值策略 $\theta^* = (\theta^{0*}, \theta^{1*})$.

(2) 如果未定权益是自然的，则欧式期权的价格 $C_0(\mu, f_T)$ 不依赖于 $\mu$, 且

$$C_0(f_T) \triangleq C_0(\mu, f_T) = Ee^{-rT}\psi_T(S(r)) \qquad (5-78)$$

**证明** 注意到 $E^* f_T(\omega) = EZ_T^*(\omega) f_T(\omega)$, 由条件 (5 − 76), 以及 Holder 不等式，不难得知

$$E^* f_T(\omega) < \infty$$

令

$$X_t^*(\mu, \omega) = E^*\left(\frac{f_T(\omega)}{B_T(\omega)} \Big| \mathcal{F}_t^{W^*}\right) \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (5-79)$$

则它在测度 $P^*$ 下是一个非负的鞅．由局部鞅表示 5.14 定理，有

$$X_t^*(\mu, \omega) = X_0^*(\mu, \omega) + \int_0^t a_s(\omega) dW_s^*(\omega) \qquad (5-80)$$

其中 $a_s(\omega)$ 为 $\mathcal{F}_s^{W^*}$ 可测， $0 \leqslant s \leqslant T$, 且

$$\int_0^T a_s^2(\omega) ds < \infty \qquad (5-81)$$

注意到 $\mathcal{F}_t^{W^*} = \mathcal{F}_t^{S(\mu)}$, 因此 $a_t(\omega)$ 是 $S(\mu)$ 的泛函，从而存在 $(C_T, \mathcal{B}_T)$ 上适应可测泛函 $a_t^*(\cdot)$, 使 $a_t(\omega) = a_t^*(S(\mu))$. 令

$$\theta_t^1(S(\mu)) \triangleq \frac{a_t^*(S(\mu))B_t}{\sigma S_t(\mu)} \tag{5-82}$$

考虑到 $X_t^*(\mu,\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t^{S(\mu)}$ 可测的，令

$$\theta_t^0(S(\mu)) = X_t^*(\mu,\omega) - \theta_t^1(S(\mu))\frac{S_t(\mu)}{B_t} \tag{5-83}$$

由此得到策略 $\theta^* = (\theta_t^*)_{0\leqslant t\leqslant T}, \theta_t^* = (\theta_t^{0*}, \theta_t^{1*}), 0 \leqslant t \leqslant T$, 其中

$$\theta_t^{0*} = \theta_t^0(S(\mu)), \quad \theta_t^{1*} = \theta_t^1(S(\mu))$$

下面证明

(1)$\theta^* \in \mathrm{SF}$,

(2)$X_t^*(\mu,\omega) = \widetilde{V}_t^{\theta^*}(\mu,\omega)$.

这里 $\widetilde{V}_t^{\theta^*}(\mu,\omega)$ 为策略 $\theta^*$ 下的资本过程的折现. 由 $\theta_t^{0*}, \theta_t^{1*}$ 的定义，及 (5 − 83) 式，易知 (2) 成立，这表明 $X_t^*(\mu,\omega)$ 就是相应于策略 $\theta^*$ 的折现资本过程. 由 Ito 公式表明

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t^{\theta^*}(\mu,\omega) &= B_t\mathrm{d}X_t^*(\mu,\omega) + X_t^*(\mu,\omega)\mathrm{d}B_t \\
&= B_t a_t(\omega)\mathrm{d}W_t^*(\omega) + X_t^*(\mu,\omega)\mathrm{d}B_t \\
&= (X_t^*(\mu,\omega) - \frac{a_t(\omega)}{\sigma})\mathrm{d}B_t \\
&\quad + \frac{a_t(\omega)B_t}{\sigma S_t(\mu)}S_t(\mu)(r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t^*) \\
&= \theta_t^{0*}\mathrm{d}B_t + \theta_t^{1*}\mathrm{d}S_t(\mu,\omega)
\end{aligned}$$

对 $\theta_t^{0*}, \theta_t^{1*}$ 相应的 (3 − 38) 式的条件是成立的，故 $\theta^* \in SF$. 由

(5 − 79) 式，

$$\begin{aligned} V_t^{\theta^*}(\mu,\omega) &= X_t^*(\mu,\omega)B_t \\ &= E^*\left(\mathrm{e}^{-r(T-t)}f_T(\omega)|\mathcal{F}_t^{W^*}\right) \\ &= E^*\left(\mathrm{e}^{-r(T-t)}f_T(\omega)|\mathcal{F}_t^{S(\mu)}\right) \end{aligned} \qquad (5-84)$$

而

$$V_0^{\theta^*}(\mu,\omega) = E^*\mathrm{e}^{-rT}f_T(\omega) \qquad (5-85)$$

$$V_T^{\theta^*}(\mu,\omega) = f_T(\omega) \qquad (5-86)$$

这表明 $\theta^*$ 是一个初始资本为 $x = E^*\mathrm{e}^{-rT}f_T(\omega)$ 的 $(\mu,x,f,T)$ 保值策略. 按照 (3 − 35) 式，欧式期权的价格小于 $E^*\mathrm{e}^{-rT}f_T(\omega)$, 联合 (5 − 73) 式，则欧式期权的价格

$$C_0(\mu,f_T) = E^*\mathrm{e}^{-rT}f_T(\omega) \qquad (5-87)$$

而当未定权益是自然时，由 (5 − 74) 式

$$\begin{aligned} C_0(\mu,f_T) &= E^*\mathrm{e}^{-rT}\psi_T(S(\mu)) \\ &= E\mathrm{e}^{-rT}\psi_T(S(r)) \\ &= E\mathrm{e}^{-rT}f_T \end{aligned} \qquad (5-88)$$

因此 $C_0(\mu,f_T)$ 不依赖于 $\mu$, (5 − 78) 式成立. □

**5.27注:** 由上面的叙述可见，对于未定权益 $f_T(\omega)$ 的定价，关键是三个步骤:

1) 找到等价鞅测度，也即使得股票的折现价格 $\widetilde{S}_t$ 为鞅;

2) 取折现权益 $\dfrac{f_T}{B_T}$ 在等价鞅测度下的条件期望过程

$$X_t^*(\mu,\omega) = E^*\left(\frac{f_T(\omega)}{B_T(\omega)}\Big|\mathcal{F}_t^{W^*}\right) \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

3) 寻找可料过程 $\theta_t^1$, 使得

$$dX_t^* = \theta_t^1 d\widetilde{S}_t$$

从而求得自筹资策略 $\theta = (\theta^0, \theta^1)$, 使得相应的资本过程 $\widetilde{V}^\theta = X^*$. 于是折现资本过程

$$V_t^\theta(\mu, \omega) = E^*(e^{-r(T-t)} f_T(\omega) | \mathcal{F}_t^{W^*})$$

它在 $t=0$ 的值就是期权 (初始) 价格，而它在 $t$ 的值就是期权在 $t$ 时的价格.

对于欧式自然期权 $f_T = f(S_T)$, 由 (5 − 74) 式，期权的定价不依赖于 $\mu$, 亦即期权在 $t$ 时的价格

$$\begin{aligned} C_t(f_T) &= E\left(e^{-r(T-t)} f(S_T(r)) | \mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{-r(T-t)} f(S_T(r)) | S_t\right) \\ &= e^{-r(T-t)} E\left\{ f(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_t - W_s)}) \right\} |_{x=S_t} \quad (5-89) \end{aligned}$$

特别对于欧式标准期权，其买方未定权益

$$f_T(\omega) = (S_T - K)^+$$

是一种自然期权. 若记

$$F(t,x) = E\left(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} - K\right)^+ \quad (5-90)$$

则欧式标准期权买方权益的价格

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E\left(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T - W_t)} - K\right)^+ \\ &= e^{-r(T-t)} F(T-t, S_t) \quad (5-91) \end{aligned}$$

由于

$$F(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0(t,x)}^{\infty} \left( x \exp\left\{ \sigma y \sqrt{t} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} - K \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

其中 $y_0(t,x)$ 是方程

$$x \exp\left\{ \sigma y \sqrt{t} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} = K$$

关于 $y$ 的解，即

$$y_0(t,x) = \frac{\log(K/x) - (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

所以

$$\begin{aligned}
& e^{-rt} F(t,x) \\
= & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0(t,x)}^{\infty} x \exp\left\{ \sigma y \sqrt{t} - \frac{\sigma^2 t}{2} - \frac{y^2}{2} \right\} dy \\
& - K e^{-rt} [1 - \Phi(y_0(t,x))] \\
= & \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0(t,x)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{t})^2} dy - K e^{-rt} [1 - \Phi(y_0(t,x))] \\
= & x \left( 1 - \Phi(y_0(t,x) - \sigma\sqrt{t}) \right) - K e^{-rt} [1 - \Phi(y_0(t,x))] \qquad (5-92)
\end{aligned}$$

$C_t(f_T)$ 只依赖于 $t, S_t$, 故可改记为 $C(t, S_t)$,

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \qquad (5-93)$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态的分布函数,

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (5-94)$$

$$d_2 = \frac{\log(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{5-95}$$

而初始价格

$$C(0, S_0) = S_0\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}\Phi(d_2) \tag{5-96}$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5-97}$$

$$d_2 = \frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5-98}$$

这就是著名的 Black-Scholes 公式.

现在我们把这重要的结果写成定理.

**5.28定理** (1) 对标准的欧式买方期权的定价由下面的 Black-Scholes 公式确定:

$$C(t, S_t) = S_t\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

其中 $d_1, d_2$ 由 $(5-94)$ 式, $(5-95)$ 式确定. 而初始价格由 $(5-96)$ 式, $(5-97)$ 式, $(5-98)$ 式确定.

(2) 最小保值策略 $\theta = (\theta^0, \theta^1)$, 其中

$$\theta_t^1 = \Phi(d_1) \tag{5-99}$$

$$\theta_t^0 = -K\mathrm{e}^{-rT}\Phi(d_2) \tag{5-100}$$

而资本过程

$$V_t^\theta = C(t, S_t) = \theta_t^0 B_t + \theta_t^1 S_t \tag{5-101}$$

**5.29注** 对于卖方权益 $f_T=(K-S_T)^+$, 此时 $f_T=(K-S_T)^+=(S_T-K)^+-S_T+K$, 于是

$$
\begin{aligned}
&Ee^{-r(T-t)}(K-S_T)^+\\
=&Ee^{-r(T-t)}(S_T-K)^+-Ee^{-r(T-t)}S_T+Ke^{-r(T-t)}\\
=&C(t,S_t)-S_t+Ke^{-r(T-t)}
\end{aligned}
$$

因此，卖方价格

$$P(t,S_t)=C(t,S_t)-S_t+Ke^{-r(T-t)} \tag{5-102}$$

Black-Scholes 公式的最主要特征是，公式中不含 $\mu$, 也即对于自然的未定权益，其期权价格不依赖于飘移系数 $\mu$. 这个事实的确有点使人惊奇，它首先被 Merton 在 1973 年发现．从经济学的观点看，这表明风险的中性．事实上，$\mu$ 是期望的收益率，$r$ 是无风险利率，$\mu-r$ 度量了风险的程度．由于 B-S 公式中不含 $\mu$, 因此，假定标的资产的价格过程满足

$$dS_t=S_t(rdt+\sigma dW_t)$$

并不影响欧式期权的定价，这就是所谓 **风险中性定价**.

上述的 $V_t=F(t,S_t)$ 就是期权的价格，它与标的资产 (股票) 的价格的随机性同源于布朗运动． Black-Scholes 的基本想法就是构造一个证券组合：

1 份期权与 $\Delta$ 份股票．记这样的组合的值为 $\Pi$, 则

$$\Pi=V-\Delta S \tag{5-103}$$

于是

$$\begin{aligned}
d\Pi_t &= dV_t - \Delta dS_t \\
&= \left(C_t + \mu S_t C_x + \frac{\sigma^2}{2} C_{xx} S_t^2 - \mu \Delta S_t\right) dt \\
&\quad + \sigma S_t (C_x - \Delta) dW_t
\end{aligned} \tag{5-104}$$

当我们选择 $\Delta = C_x(t, S_t)$ 时,

$$d\Pi_t = \left(F_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 F_{xx}\right) dt \tag{5-105}$$

于是 $\Pi$ 是一个无风险证券 (因为不含 $dW_t$ 项), 那么在无套利市场里, 它的收益率必须等于市场的无风险利率 $r$. 从而

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r(C(t, S_t) - C_x S_t) dt \tag{5-106}$$

比较 (5 − 105) 式, (5 − 106) 式则得

$$C_t + rxC_x \frac{\sigma^2}{2} x^2 C_{xx} - rC = 0$$

这就是 Black-Scholes 方程.

## 习题与问题五

5.1 (Doob) 设鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t) \in \mathfrak{M}_T^c$, 且

$$< X >_t = \int_0^t a^2(s, \omega) ds$$

其中可测的适应过程 $a^2(s, \omega) > 0, dP \times dt$−a.s., 证明:

存在 Brownian 运动 $(B_t, \mathcal{F}_t), t \leqslant T$, 使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, \omega) dW_s$$

5.2 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 为带滤的概率空间, $W_t$ 为 Brownian 运动. $P^*$ 是等价鞅测度, $W_t^*$ 为 $P^*$-Brownian 运动, 而 $(M_t, \mathcal{F}_t^W), 0 \leqslant t \leqslant T$ 为 $P^*$ 鞅, 证明: 存在适应过程 $(J_t, \mathcal{F}_t)$ 满足 $\int_0^T J_t^2 \, \mathrm{d}t < \infty$, 使得

$$M_t = M_0 + \int_0^T J_t \mathrm{d}W_t^*$$

5.3 设有界随机变量 $f \in \mathcal{F}_t^B$, 证明 $f$ 可用形如

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \{i(z_k B_{t_k})\}\right)$$

的序列均方逼近, 其中 $t_k$ 为 $[0, t]$ 的任意剖分点, 而 $z_i$ 为实数.

5.4 证明 $(5-69)$ 式是 $X_t = \int_0^t f_s(\omega) \mathrm{d}W_s$ 为平方可积鞅的充要条件.

5.5 证明 5.25 定理.

5.6 参考文献 [6] 研究何时 Ito 过程为扩散过程.

5.7 令 $\alpha(t) = \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{2}{3}t^3)$, $B_t$ 为 Brownian 运动, 证明存在另一个 Brownian 运动 $\widetilde{B}_t$, 使得

$$\int_0^{\alpha_t} \mathrm{e}^s \, \mathrm{d}B_s = \int_0^t r \, \mathrm{d}\widetilde{B}_r$$

参考文献 [6]§ 8.4.

5.8 参考文献 [6] 定理 12.3.8 及练习 12.14, 在 B-S 金融模型中, 如 $\mu > r$. 未定权益 $f_T = (S_T - K)^+$, 证明美式期权的定价

$$p(f_T) = \mathrm{e}^{-rT} E^* \left\{(S_T - K)^+\right\}$$

5.9 阅读文献 [6]§12.3, 并用 §3.4,§5.5 的记号改写它.

# 第六章　Ito 过程与扩散过程测度的绝对连续性

在 §4.3 中我们曾经引入 Wiener 空间 $\mathcal{W}^m = C(R_+ \to R^m)$, 在研究连续过程是必要的. 本章所讨论过程的时间参数在 $[0,T]$ 上, 为方便我们记 $(C_T, \mathcal{B}_T)$ 为 $[0,T]$ 上连续函数按一致收敛的拓扑生成的可测空间, 亦即对于 $x \in C_T$, 令范数 $\|x\| = \sup_{t \leqslant T} |x(t)|$, 由此范数诱导的拓扑生成的 $\sigma$ 代数记为 $\mathcal{B}_T$, 这就是 $(\mathcal{W}_T^m, \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m))$.

本章我们讨论由 Ito 过程或扩散过程在 $(C_T, \mathcal{B}_T)$ 上诱导测度与 Wiener 测度之间的绝对连续性以及相联系的 Radon-Nikodym 导数, 这在滤波理论中有重要的应用.

下面的引理经常要用到.

**6.0引理**　设 $\xi = (\xi_t), t \leqslant T$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上连续随机过程, $\zeta = (\zeta_t), t \leqslant T$ 为 $\mathcal{F}_t^\xi$ 适应过程, 则存在 $([0,T] \times C_T, \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{B}_T, \lambda \times P)$ 上的可测函数 $\phi(t,x)$ 关于 $\mathcal{B}_t$, 适应使得

$$\lambda \times P\left((t,\omega) : \zeta_t(\omega) \neq \phi(t, \xi(\omega))\right) = 0 \qquad (6-0).$$

**证明**　由过程投影理论, 适应过程有可选修正, 它更是循序可测的修正. 因此不妨假设 $\zeta_t$ 为循序过程, 因此 $\zeta_{t \wedge u}$ 为 $\mathcal{B}([0,u]) \times \mathcal{B}_u$ 可测. 于是由 Doob 复合函数定理, 存在 $([0,T] \times C_T, \mathcal{B}([0,u]) \times \mathcal{B}_u)$

---

此时 $\mathcal{B}_{t+}$ 右连续.

可测泛函 $\phi_u(t,x)$ 使得

$$\lambda \times P\left((t,\omega):\zeta_{t\wedge u}(\omega)\neq\phi_u(t,\xi)\right)=0$$

将 $[0,T]$ 作 $2^n$ 等分，记 $u_{k,n}=kT/2^n, k=1,\cdots,2^n$, 并令

$$\phi^n(t,x)=\phi_0(t,x)I_{\{0\}}+\sum_{k=1}^{2^n}\phi_{u_{k,n}}(t,x)I_{(u_{k-1,n},u_{k,n})}(t)$$

以及 $\phi(t,x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\phi^n(t,x)$, 则 $\phi(t,x)$ 是可测泛函，且 $\forall t,\phi^n(t,x)\in$ $\mathcal{B}_{u_{k,n}}$. 因此 $\forall u_{k-1,n}<t\leqslant u_{k,n},\phi(t,x)\in\mathcal{B}_{t+}$. 而由

$$\begin{aligned}
&\{(t,\omega):|\phi(t,\xi)-\zeta_t|>\epsilon\}\subseteq\{(t,\omega):|\phi(t,\xi)-\phi^n(t,\xi)|>\epsilon/2\}\\
&\cup\{(t,\omega):|\phi^n(t,\xi)-\zeta_t(\omega)|>\epsilon/2\}\\
&\subseteq\{|\phi(t,\xi)-\phi^n(t,\xi)|>\epsilon/2\}\cup\{(0,\omega):|\phi_0(0,\xi)-\zeta_0|>\epsilon/2\}\cup\\
&\bigcup_{k=1}^{2^n}\left\{(u_{k-1,n}<t\leqslant u_{k,n},\omega):|\phi_{u_{k,n}}(t,\omega)-\zeta_{t\wedge u_{k,n}}(\omega)>\epsilon/2\right\}
\end{aligned}$$

它们都是 $\lambda\times P$ 零测集. 再由 $\epsilon$ 的任意性可知

$$\lambda\times P\{(t,\omega):\phi(t,\xi)\neq\zeta_t(\omega)\}=0$$

□

## §6.1 Ito 过程与 Wiener 测度的绝对连续性

设 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)),t\geqslant 0$ 为带 $\sigma$ 代数流的概率空间，满足通常条件. 本章用 $W=(W_t,\mathcal{F}_t)$ 表示 Wiener 过程，也即 Brownian 运动.

设有 Ito 过程 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t), 0 \leqslant t \leqslant T$[1] 满足

$$d\xi_t = \beta_t(\omega)dt + dW_t, \xi_0 = 0 \tag{6-1}$$

其中

$$P\left(\int_0^T |\beta_t(\xi)|dt < \infty\right) = 1$$

$\forall B \in \mathcal{B}_T$, 令

$$\mu_\xi(B) = P(\omega : \xi \in B), \mu_W(B) = P(\omega : W \in B) \tag{6-2}$$

本节讨论这两个测度的绝对连续性与等价性问题.

我们用 $\mu_{t,\xi}$ 及 $\mu_{t,W}$ 分布表示上述两个测度在 $\mathcal{B}_t = \sigma(x \in C_T : x_s, s \leqslant t)$ 上的限制.

**6.1定理** 设过程 $(\xi_t)$ 满足 (6 − 1) 式，如果

$$P\left(\int_0^T \beta_t^2 dt < \infty\right) = 1 \tag{6-3}$$

$$E\exp\left\{-\int_0^T \beta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt\right\} = 1 \tag{6-4}$$

则 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 而且 a.s. 有

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = E\left[\exp\left\{-\int_0^T \beta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt\right\} |\mathcal{F}_T^\xi\right] \tag{6-5}$$

**证明** 记

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)$$

---

[1] 当 $T = \infty$ 时，$0 \leqslant t < \infty$

由 Ito 公式, $Z_t = 1 - \int_0^t Z_s\beta_s\,\mathrm{d}W_s$, 而由 (6−3) 式可知 $P\{\int_0^T \beta_t^2 Z_t^2\,\mathrm{d}t < \infty\} = 1$. 从而 $Z_t$ 是非负上鞅, 而由 (6−4) 式 $EZ_T = 1$. 于是它是非负鞅. 由 Girsanov 定理过程

$$\xi_t = \int_0^t \beta_s \mathrm{d}s + W_t$$

在测度 $\mathrm{d}\widetilde{P} = Z_T\mathrm{d}P$ 下是 wiener 过程. 所以 $\forall A \in \mathcal{B}_T$,

$$\begin{aligned}
\mu_W(A) &= \widetilde{P}(\xi \in A) \\
&= \int_{(\omega:\xi\in A)} Z_T \mathrm{d}P \\
&= \int_{(\omega:\xi\in A)} E(Z_T|\mathcal{F}_T^\xi)\mathrm{d}P \qquad (6-6)
\end{aligned}$$

于是存在 $\mathcal{B}_T$ 可测函数 $\phi(x)$, 使得

$$E(Z_T|\mathcal{F}_T^\xi) = \phi(\xi) \qquad (6-7)$$

从而 (6 − 6) 式可写为

$$\mu_W(A) = \int_{(\omega:\xi(\omega)\in A)} \phi(\xi)\mathrm{d}P = \int_A \phi(x)\mathrm{d}\mu_\xi(x)$$

所以 $\mu_W \ll \mu_\xi$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}\mu_W}{\mathrm{d}\mu_\xi}(x) = \phi(x), \mu_\xi$−a.s. 而

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mu_W}{\mathrm{d}\mu_\xi}(\xi) &= \phi(\xi) = E(Z_T|\mathcal{F}_T^\xi) \\
&= E\left[\exp\left\{-\int_0^T \beta_t \mathrm{d}\xi_t + \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right\}|\mathcal{F}_T^\xi\right]
\end{aligned}$$

(6 − 5) 式得证.

下面证明 $\mu_\xi \ll \mu_W$. 由 (6−3) 式可得 $P\left(|\int_0^T \beta_t \mathrm{d}W_t| < \infty\right) = 1$, 从而 $P(Z_T = 0) = 0$, 于是 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\widetilde{P}} = Z_T^{-1}, P\text{--a.s.} \forall A \in \mathcal{B}_t$,

$$\begin{aligned}
\mu_\xi(A) &= P(\omega : \xi \in A) = \int_{\{\xi \in A\}} Z_T^{-1} \mathrm{d}\widetilde{P} \\
&= \int_{\{\xi \in A\}} \widetilde{E}(Z_T^{-1} | \mathcal{F}_T^\xi) \widetilde{P} \\
&= \int_A \widetilde{E}(Z_T^{-1} | \mathcal{F}_T^\xi)|_{\xi = x} \mathrm{d}\mu_W(x) \\
&= \int_A \widetilde{E}(Z_T^{-1} | \mathcal{F}_T^\xi) \mathrm{d}\mu_W(x)
\end{aligned}$$

所以 $\mu_\xi \ll \mu_W$, 而且由 Bayes 公式,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(\xi) &= \widetilde{E}(Z_T^{-1} | \mathcal{F}_T^\xi) \\
&= E\left[\exp\left\{-\int_0^T \beta_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right\} | \mathcal{F}_T^\xi\right]^{-1} \quad (6-8)
\end{aligned}$$

□

**注**: 如果将定理中的 $T$, 改为停时 $\sigma$, 则 $\mu_\xi$ 与 $\mu_W$ 在 $\mathcal{B}_\sigma$ 上的限制也是等价的.

**6.2推论** $\forall t \leqslant T$, 设 $\beta_t \in \mathcal{F}_t^\xi$, 则在 (6 − 3) 式, (6 − 4) 式的条件下, 则 a.s. 有

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(\xi) = \exp\left\{-\int_0^T \beta_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right\} \quad (6-9)$$

因为 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 则

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x) = \left[\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x)\right]^{-1}$$

而且

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(W) = \exp\left(\int_0^T \beta_t(W)dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t(W)dt\right) \quad (6-10)$$

**例 1** 设 $\xi_t = \theta t + W_t, t \leqslant 1, \theta \in \mathcal{F}_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$, 且与 Wiener 过程独立, 则

$$E\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx < \infty$$

由定理 3.12, 可见 $E\exp\left(-\theta W_1 - \dfrac{\theta^2}{2}\right) = 1$. 条件 (6 − 4) 满足. 于是 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 且

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = E\left[\exp(-\theta\xi_1 + \frac{\theta^2}{2}|\mathcal{F}_1^\xi)\right]$$

条件分布 $P(\theta \leqslant y|\mathcal{F}_1^\xi) \sim \mathcal{N}\left(\dfrac{\xi}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, 因此

$$E\left[\exp(-\theta\xi_1 + \frac{\theta^2}{2})|\mathcal{F}_1^\xi\right] = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)$$

所以有

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x) = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad (6-11)$$

如果没有条件 (6 − 4), 我们只能得到 $\mu_\xi \ll \mu_W$.

**6.3定理** 在 (6-1) 式, (6-3) 式条件下, 我们有 $\mu_\xi \ll \mu_W$.

**证明** $\forall n$, 令

$$\tau_n = \inf\left\{t \leqslant T : \int_0^t \beta_s^2 \mathrm{d}s \geqslant n\right\} \wedge T \tag{6-12}$$

并记

$$I_t^n = I_{(\int_0^t \beta_s^2 \mathrm{d}s \leqslant n)}, \ GV \beta_t^n = I_t^n \beta_t$$

$$\xi_t^n = \int_0^t \beta_s^n \mathrm{d}s + W_t, \ GV, 0 \leqslant t \leqslant T$$

则可推得

$$E\exp\left\{-\int_0^T \beta_t^n \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T (\beta_t^n)^2 \mathrm{d}t < \infty\right\} = 1$$

于是 $\mu_{\xi^n}^n \ll \mu_W, \forall n$. 不难证明 $\forall \Gamma \in B_T$

$$\mu_\xi(\Gamma) = P(\xi^n \in \Gamma, \tau_n = T) + P(\xi \in \Gamma, \tau_n < T)$$

从而若 $\mu_W(\Gamma) = 0$, 则由

$$\mu_\xi(\Gamma) = P(\xi \in \Gamma, \tau_n < T) \leqslant P\left(\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t > n\right) \to 0$$

可知 $\mu_\xi \ll \mu_W$. □

下面是 6.1,6.3 定理在多维情形的推广.

**6.4定理** 设 $\xi_t = (\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t))$ 是 $n$ 维 Ito 过程, 满足

$$\mathrm{d}\xi_t = \beta_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0 \tag{6-13}$$

如果

$$P\left(\int_0^T \beta_t^* \beta_t \mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \tag{6-14}$$

$$E\exp\left(-\int_0^T \beta_t^* \,\mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\beta_t^* \beta_t \mathrm{d}t\right) = 1 \tag{6-15}$$

则 $\mu_\xi \sim \mu_W$，且 $P-$a.s.

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(\xi) = E\left[\exp\left\{-\int_0^T \beta_t^* \,\mathrm{d}\xi_t + \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^* \beta_t \,\mathrm{d}t\right\} |\mathcal{F}_T^\xi\right] \tag{6-16}$$

**6.5定理** 设 $\xi_t = (\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t))$ 是 $n$ 维 Ito 过程，满足

$$\mathrm{d}\xi_t = \beta_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0$$

并且

$$P\left(\int_0^T \beta_t^* \beta_t \mathrm{d}t < \infty\right) = 1$$

则 $\mu_\xi \ll \mu_W$.

## §6.2 扩散过程测度关于 Wiener 测度的绝对连续性

设扩散过程

$$\mathrm{d}\xi_t = \alpha_t(\xi)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0 \tag{6-17}$$

其中 $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_{t+})$ 定义在 $(C_T, \mathcal{B}_T)$ 上，且

$$P\left(\int_0^T |\alpha_t(\xi)|\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \tag{6-18}$$

由 6.3 定理，条件 $P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t<\infty\right)=1$ 是 $\mu_\xi \ll \mu_W$ 的充分条件，我们现在要证明，对于扩散过程这个条件不但充分而且必要.

**6.6定理** 设 $\xi$ 是满足 (6 − 17) 式的扩散过程，则

$$\mu_\xi \ll \mu_W \iff P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t<\infty\right)=1 \qquad (6-19)$$

**证明** 只要证必要性. 记

$$Z_t(x)=\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,x),\ 0\leqslant t\leqslant T$$

往证 $Z=(Z_t(W),\mathcal{F}_t^W),t\leqslant T$ 是鞅.

设 $s<t,\lambda(W)\in b\mathcal{F}_s^W$, 则由测度变换定理,

$$\begin{aligned}
&E\lambda(W)Z_t(W)\\
&=\int\lambda(x)\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,x)\mathrm{d}\mu_W(x)=\int\lambda(x)\mathrm{d}\mu_{t,\xi}(x)\\
&=\int\lambda(x)\mathrm{d}\mu_{s,\xi}(x)=\int\lambda(x)Z_s(x)\mathrm{d}\mu_W(x)\\
&=E\lambda(W)Z_s(W)
\end{aligned}$$

这里 $\mu_{t,\xi}(\cdot)$ 表示 $\mu_\xi$ 在 $B_t$ 上的限制. 因此

$$E(Z_t(W)|\mathcal{F}_s^W)=Z_s(W),P-\text{a.s.}$$

对鞅 $Z_t$ 应用定理 5.14, 则存在过程 $\gamma=(\gamma_t,\mathcal{F}_t^W),t\leqslant T$, 满足

$$P\left(\int_0^T\gamma_t^2(\omega)\mathrm{d}t<\infty\right)=1$$

使得

$$Z_t(W) = 1 + \int_0^t \gamma_s(\omega)\mathrm{d}W_s,\ t \leqslant T \tag{6-20}$$

由定理 3.13(Girsanov), 若令 $\mathrm{d}\widetilde{P} = Z_T\mathrm{d}P$, 则

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t b_s(\omega)\mathrm{d}s \tag{6-21}$$

为测度 $\widetilde{P}$ 下的 Wiener 过程，其中 $b_s(\omega) = Z_s^+(W)\gamma_s(\omega)$, 而且

$$\widetilde{P}\left(\int_0^T b_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \tag{6-22}$$

由引理 6.0, 对于 $b_s(\omega) \in \mathcal{F}_s^W$, 存在可测泛函 $\beta = (\beta_s(x), \mathcal{B}_{s+})$ 使 $b_s(\omega) = \beta_s(W(\omega))$. 于是

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta_s(W)\mathrm{d}s$$

由 (6-22) 式， $\widetilde{P}(\int_0^T \beta_s^2(W)\mathrm{d}s < \infty) = 1$. 从而由 $\mu_\xi \ll \mu_W$ 得出

$$P\left(\int_0^T \beta_s^2(\xi)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \tag{6-23}$$

定义 $\hat{W} = (\hat{W}_t(\xi), \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$, 其中

$$\hat{W}_t(x) = x_t - \int_0^t \beta_s(x)\mathrm{d}s \tag{6-24}$$

可以通过对 $\lambda(\xi)\in b\mathcal{F}_s^\xi$, 计算

$$
\begin{aligned}
&E\lambda(\xi)e^{iz[\hat{W}_t(\xi)-\hat{W}_s(\xi)]}\\
&=\int_{C_T}\lambda(x)e^{iz[\hat{W}_t(x)-\hat{W}_s(x)]}d\mu_\xi(x)\\
&=\int_{C_T}\lambda(x)e^{iz[\hat{W}_t(\xi)-\hat{W}_s(\xi)]}Z_T(x)d\mu_W(x)\\
&=\int_{C_T}\lambda(W)e^{iz[\widetilde{W}_t-\widetilde{W}_s]}Z_T(W)dP\\
&=\widetilde{E}\lambda(W)e^{iz[\widetilde{W}_t-\widetilde{W}_s]}\\
&=\widetilde{E}\left\{\lambda(W)\widetilde{E}\left(e^{iz[\widetilde{W}_t-\widetilde{W}_s]}|\mathcal{F}_s\right)\right\}\\
&=\widetilde{E}\lambda(W)e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}\\
&=e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}E\lambda(W)Z_T(W)\\
&=e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}E\lambda(\xi) \qquad (6-25)
\end{aligned}
$$

而另一方面,

$$
E\lambda(\xi)e^{iz[\hat{W}_t(\xi)-\hat{W}_s(\xi)]}=E\left\{\lambda(\xi)E\left[e^{iz[\hat{W}_t(\xi)-\hat{W}_s(\xi)]}|\mathcal{F}_s^\xi\right]\right\}
$$

故

$$
E\left\{e^{iz[\hat{W}_t(\xi)-\hat{W}_s(\xi)]}|\mathcal{F}_s^\xi\right\}=e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}
$$

这表明, $\hat{W}_t(\xi)$ 为 wiener 过程. 由 (6-18) 式、(6-24) 式, 我们有

$$
\begin{aligned}
\hat{W}_t(\xi)&=\xi_t-\int_0^t\beta_s(\xi)ds\\
&=W_t+\int_0^t(\alpha_s(\xi)-\beta_s(\xi))ds \qquad (6-26)
\end{aligned}
$$

从而

$$\hat{W}_t(\xi) - W_t = \int_0^t [\alpha_s(\xi) - \beta_s(\xi)]\mathrm{d}s$$

作为连续的变差鞅，它为 0, 所以 $\hat{W}_t(\xi) = W_t, P\text{a.s.}$, 而且

$$\alpha_s(\xi) = \beta_s(\xi), P - \text{a.s.} \tag{6 - 27}$$

(6-23) 式给出了 (6-19) 式必要性的最终结果. □

下面研究在定理 6.6 中 Radon-Nikodym 导数

$$Z_t(x) = \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t, x)$$

**6.7定理** 设 6.6 定理的充要条件成立，则 6.6 定理中的过程 $Z_t(W)$ 是下面方程的唯一解

$$Z_t(W) = 1 + \int_0^t Z_s(W)\alpha_s(W)\mathrm{d}W_s \tag{6 - 28}$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t, W) = \exp\left(\Gamma_t(\alpha(W)) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s\right) \tag{6 - 29}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t, \xi) = \exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\,\mathrm{d}\xi_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \tag{6 - 30}$$

$$P\left(\int_0^t \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s < \infty\right)$$

$$= E\exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \tag{6 - 31}$$

这里

$$
\begin{aligned}
\Gamma_t(\alpha(\xi)) &= \lim_{n\to\infty} I_{(\int_0^t \alpha_s^2 \mathrm{d}s<\infty)} \int_0^t \alpha_s^{(n)} \mathrm{d}W_s \\
\alpha_s^{(n)} &= \alpha_s I_{(\int_0^t \alpha_s^2 \mathrm{d}s\leqslant n)}
\end{aligned}
$$

**证明** 首先证明

$$
P\left(\int_0^T (Z_s(W)\alpha_s(W))^2 \mathrm{d}s < \infty\right) = 1
$$

由 (6-27) 式， $\mu_\xi(\alpha_s(x) \neq \beta_s(x)) = 0$, 而由下式可知 $\mu_\xi(Z_s(x) = 0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
P(x : Z_s(x) = 0) &= \int_{C_T} I_{(x:Z_s(x)=0)} Z_T(x) \mathrm{d}\mu_W(x) \\
&= EI_{(Z_s(W)=0)} Z_T(W) \\
&= EI_{(Z_s(W)=0)} E(Z_T(\omega)|\mathcal{F}_s^W) \\
&= EI_{(Z_s(W)=0)} Z_s(W) = 0
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& EZ_s(W) I_{[Z_s(W)(\alpha_s(W)-\beta_s(W))\neq 0]} \\
&= \mu_\xi \left(Z_s(x)[\alpha_s(x) - \beta_s(x)] \neq 0\right) = 0
\end{aligned}
$$

从而

$$
Z_s(W)\alpha_s(W) = Z_s(W)\beta_s(W) \tag{6-32}
$$

由 $Z_s(W)\beta_s(W)=Z_s(W)Z_s^+(W)\gamma_s(W)$, 立得

$$P\left(\int_0^T (Z_s(W)\alpha_s(W))^2\mathrm{d}s<\infty\right)$$
$$=P\left(\int_0^T (Z_s(W)Z_s^+(W)\gamma_s(W))^2\mathrm{d}s<\infty\right)=1$$

这样随机积分 $\int_0^t Z_s(W)\alpha_s(W)\mathrm{d}W_s$ 有意义. 往证

$$1+\int_0^t Z_s(W)\alpha_s(W)\mathrm{d}W_s=1+\int_0^t \gamma_s(\omega)\mathrm{d}W_s \qquad (6-33)$$

令 $\tau=\inf\{t\leqslant T: Z_t=0\},\inf\varnothing=\infty$, 因为 $(Z_t(W),\mathcal{F}_t^W),t\leqslant T$ 为非负鞅, 所以在 $[\tau\leqslant t\leqslant T]$ 上 $Z_t(W)=0,P-$a.s.. 当 $t<\tau$, 由于 $Z_s^+(W)=Z_s^{-1}(W),(6-33)$ 式成立; 而当 $\tau\leqslant t,(6-33)$ 式成立且均为 $0,(6-28)$ 式得证.

由 (6-28) 式, 如果

$$P\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s<\infty\right)=1 \qquad (6-34)$$

则由 Ito 公式可得

$$Z_t(W)=\exp\left\{\int_0^t \alpha_s(W)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s\right\}$$

如果我们没有条件 (6−34), 通过局部化技术可以证明 (6−29) 式, 具体的证明可参考文献 [2] 引理 6.3.

最后证明 (6 − 31) 式. 由 (6 − 27) 式、 (6 − 30) 式,

$$
\begin{aligned}
& E\exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \\
= & E\exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \\
= & EZ_t^+(\xi)
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
EZ_t^+(\xi) &= \int Z_t^+(x)Z_t(x)\mathrm{d}\mu_W(x) \\
&= \mu_W(x : Z_t(x) > 0) \\
&= P(Z_t(W) > 0)
\end{aligned}
$$

但由 (6 − 29) 式,

$$
P(Z_t(W) > 0) = P\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s < \infty\right) \qquad (6-35)
$$

所以 (6 − 31) 式得证. □

对于扩散型方程我们还有进一步的结果.

**6.8定理** 设扩散过程 $\xi$ 满足 (6 − 17) 式, 则

$$
\mu_\xi \sim \mu_W \iff \begin{cases} P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \\ P\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \end{cases} \qquad (6-36)
$$

而且

$$
\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t, W) = \exp\left(\int_0^t \alpha_s(W)\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s\right) \qquad (6-37)
$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_W}{\mathrm{d}\mu_\xi}(t,\xi) = \exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \qquad (6-38)$$

**证明** 充分性：由定理 6.6 及第一个条件则得 $\mu_\xi \ll \mu_W$，而 (6 − 29) 式意味着 (6 − 37) 式的成立．由鞅的极大不等式 $\forall N, c$(常数)

$$P\left(\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t \alpha_s(W)\mathrm{d}W_s\right| > c\right) \leqslant \frac{N}{c^2} + P\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\,\mathrm{d}s > N\right)$$

得到 $P\left(\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t \alpha_s(W)\,\mathrm{d}W_s\right| < \infty\right) = 1$，于是 (6-37) 式表明

$$\mu_W\left\{g(x) = 0\right\} = 0$$

其中 $g(x) = \dfrac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(x)$．记

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x), & g(x) > 0 \\ 0. & g(x) = 0 \end{cases}$$

则对 $A \in C_T$，有

$$\begin{aligned}\int_A g^+(x)\mathrm{d}\mu_\xi(x) &= \int_A g^+(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu_W(x) \\ &= \mu_W\left\{A \cap (g(x) > 0)\right\} \\ &= \mu_W(A) - \mu_W\left\{A \cap (g(x) = 0)\right\}\end{aligned}$$

而由 $\mu_\xi \ll \mu_W$，可得 $\mu_W\left\{A \cap (g(x) = 0)\right\} \leqslant \mu_W(g(x) = 0) = 0$，因此

$$\mu_W(A) = \int_A g^+(x)\mathrm{d}\mu_\xi(x)$$

所以 $\mu_W \ll \mu_\xi$. 而且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(x) = \left[\frac{\mathrm{d}\mu_W}{\mathrm{d}\mu_\xi}\right]^{-1}(x)$$

因此 (6 − 38) 式成立.

必要性：由于 $\mu_\xi \ll \mu_W$, 则由定理 6.6,

$$P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$$

而 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 故 $P\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$. □

## §6.3 所诱导的测度关于 Wiener 测度绝对连续的过程

6.6 定理表明对于满足 (6 − 17) 式的扩散过程 $\xi, \mu_\xi \ll \mu_W$ 的充要条件是 $P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$. 本节将证明，如果某过程所诱导的测度 $\mu_\xi \ll \mu_W$, 则 $\xi$ 必是某个扩散过程. 确切地说，我们有：

**6.9定理** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 满足通常条件，轨道连续的过程 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t), t \leqslant T$ 在 $C_T$ 上诱导的测度为 $\mu_\xi$, 如果 $\mu_\xi \ll \mu_W$, 则存在一个 Brownian 运动 $\hat{W} = (\hat{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$, 以及适应过程 $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_{t+}), t \leqslant T$, 使得

$$\xi_t = \int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}s + \hat{W}_t \qquad (6-39)$$

$$P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \qquad (6-40)$$

如果进一步假设 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 则

$$P\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \qquad (6-41)$$

**证明** 令

$$Z_t(x) = \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,x)$$

$\forall A \in \mathcal{B}_s$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{W^{-1}(A)} \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,W)\mathrm{d}P &= \int_A \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,x)\mathrm{d}\mu_W \\ &= \mu_{t,\xi}(A) = \mu_{s,\xi}(A) \\ &= \int_{W^{-1}(A)} \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(s,W)\mathrm{d}P\end{aligned}$$

可见过程 $Z = (Z_t(W), \mathcal{F}_t^W), t \leqslant T$ 是非负鞅，且

$$EZ_t(W) = \int_{C_T} \frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,x)\mathrm{d}\mu_W = 1$$

由定理 6.6, 存在过程 $\gamma = (\gamma_t, \mathcal{F}_t^W), P\left(\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t < \infty\right) = 1$, 使得

$$Z_t(W) = 1 + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}W_s, t \leqslant T \qquad (6-42)$$

由 3.13 定理 (Girsanov),

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \alpha_s(W)\mathrm{d}s$$

是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \widetilde{P})$, 上的 Brownian 运动, 其中 $\mathrm{d}\widetilde{P} = Z_T(W)\mathrm{d}P$, $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_{t+}), \forall t \leqslant T, \alpha_t(W) = Z_t^+(W)\gamma_t$. 由 $P\left(\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t < \infty\right) = 1$, 则得 $\widetilde{P}\left(\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t < \infty\right) = 1$, 而 $Z_t$ 在 $[0,T]$ 上连续，因而有界，故

$$\widetilde{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s < \infty\right) = 1$$

由于 $\forall A \in \mathcal{B}_T$,

$$\begin{aligned}
\mu_\xi(A) &= \int_A Z_T(x)\mathrm{d}\mu_\xi(x) \\
&= \int_{W^{-1}(A)} Z_T(W)\mathrm{d}P \\
&= \widetilde{P}(W \in A)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s < \infty\right) &= \mu_\xi\left(\int_0^T \alpha_s^2(x)\mathrm{d}s < \infty\right) \\
&= \widetilde{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s < \infty\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

从而 (6 − 40) 式成立．于是如同 6.6 定理关于 (6 − 24) 式所定义的过程 $\hat{W}_t(\xi)$ 的证明，可知过程

$$\hat{W}_t = \xi_t - \int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}s,\ t \leqslant T$$

是 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上的 Wiener 过程, 此即 (6−39) 式. 而当 $\mu_\xi \sim \mu_W$ 时, 由 (6 − 40) 式则得 (6 − 41) 式. □

**注**: 定理表明如果 $\mu_\xi \ll \mu_W$, 则 $\xi$ 是随机微分方程 (6 − 17) 的弱解; 如果 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 则存在如定理中的 $\alpha$, 并且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t, W) \text{与} \frac{\mathrm{d}\mu_W}{\mathrm{d}\mu_\xi}(t, \xi)$$

由 (6 − 37) 式, (6 − 38) 式所定义.

## §6.4 Ito 过程的泛函结构

对于 Ito 过程

$$\mathrm{d}\xi_t = \beta_t(\omega)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t \tag{6 − 43}$$

条件 $P\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$ 保证了 $\mu_\xi \ll \mu_W$. 但是一般地无法用显式表达它们的 Radon-Nikydom 导数, 而如果 $\xi$ 是扩散过程, 则 6.7 定理给出了 R-N 导数的表达, 因此自然要问何时 Ito 过程是某种扩散过程?

**6.10定理** 设 $\xi$ 满足 (6-43) 式, 其中

$$\int_0^T E|\beta_t(\omega)|\mathrm{d}t < \infty \tag{6 − 44}$$

并设

$$\alpha_t(\xi) = E(\beta_t|\mathcal{F}_t^\xi) \tag{6 − 45}$$

其中 $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_{t+}), t \leqslant T$ 是可测泛函. 则

(1) $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$,

$$\overline{W}_t = \xi_t - \int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}s \tag{6 − 46}$$

是一个 Wiener 过程，而且

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)dt + d\overline{W}_t \tag{6-47}$$

(2) 如果 $P\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)dt < \infty\right) = 1$, 则任意鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^{\xi})$, $t \leqslant T$ 有连续修正，它可表示为

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s(\omega)d\overline{W}_s \tag{6-48}$$

其中 $f = (f_s(\omega), \mathcal{F}_s^{\xi}), s \leqslant T$ 满足

$$P\left(\int_0^T f_s^2(\omega)ds < \infty\right) = 1$$

如果 $X$ 为平方可积鞅，则有

$$E\int_0^T f_s^2(\omega)ds < \infty$$

**证明** 1) 由于

$$\overline{W}_t = W_t + \int_0^t [\beta_s(\omega) - \alpha_s(\xi)]ds$$

对 $e^{iz(\overline{W}_t - \overline{W}_s)}$ 应用 Ito 公式，然后取条件期望 $E(\cdot|\mathcal{F}_s^{\xi})$ 可证得

$$E\left[e^{iz(\overline{W}_t - \overline{W}_s)}|\mathcal{F}_s^{\xi}\right] = e^{-\frac{1}{2}(t-s)}$$

从而推知 $\overline{W}$ 为 Wiener 过程， 1) 得证.

2) 利用 5.22 定理在 $b_t(x) \equiv 1$ 的特殊情形，那里的条件 (5 − 63) 被这里的 $P\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$ 所代替, 所以 (6−48) 式得证. □

关于 Ito 过程为扩散过程的一般结果，我们有 (文献 [6])

**注**: 设 $X$ 是 Ito 扩散，满足

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}t + b(X_t)\mathrm{d}B_t,\ X_0 = x$$

$a \in R^n, b \in R^{n\times m}$, 而 $Y_t$ 是 Ito 过程，满足

$$\mathrm{d}Y_t = u(t,\omega)\mathrm{d}t + v(t,\omega)\mathrm{d}B_t, Y_0 = x$$

其中 $u \in R^n, v \in R^{n\times m}$, 则 $X_t \simeq Y_t \iff$

$$E_x(u(t,\omega)|\mathcal{F}_t^Y) = a(Y_t^x), vv^*(t,\omega) = bb^*(Y_t^x)$$

$(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}P\text{−a.s.})$ 这里 $\simeq$ 表示同分布.

下面接着讨论 6.10 定理中过程诱导的测度之间的 Radon-Nikodym 导数.

**6.11定理** 在 6.10 定理下，如果还假定

$$P\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \qquad (6-49)$$

与

$$E\exp\left(-\int_0^T \beta_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right) = 1 \qquad (6-50)$$

则 $\mu_\xi \sim \mu_W$,

$$P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = P\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$$

而且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,W)=\exp\left(\int_0^t \alpha_s(W)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s\right) \quad (6-51)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,\xi)=\exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}\xi_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \quad (6-52)$$

式中泛函 $\alpha$ 满足 (6-45) 式.

**证明** 由 (6-49), (6-50) 式以及 6.1 定理知 $\mu_\xi \sim \mu_W$. 而由 6.10 定理可知 $\xi$ 是扩散过程, 满足 (6-47) 式. 既然 $\overline{W}$ 与 $W$ 同是 Wiener 过程, 它们同分布, 故 $\mu_\xi \sim \mu_{\overline{W}}$. 于是由 6.8 定理,

$$P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s<\infty\right)=P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\overline{W})\mathrm{d}s<\infty\right)=1$$

这表明

$$P\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s<\infty\right)=P\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s<\infty\right)=1$$

顺便指出 $(6-45)$ 的表达式中, 若将 $\xi$ 换为 $W$ 一般是不成立的.

由 $(6-37)$, $(6-38)$ 式以及 $\mu_W \equiv \mu_{\overline{W}}$ 可得 $(6-51)$, $(6-52)$ 式. □

上面的定理将 Ito 过程表示为关于 $\overline{W}$ 的扩散过程, 这在非线性滤波理论中有重要的应用. 从 $(6-46)$ 式可知 $\mathcal{F}_t^{\overline{W}} \subseteq \mathcal{F}_t^\xi$, 如果两者相等, 则表明 $\overline{W}$ 与 $\xi$ 给出同样的信息. 我们称具有

$$\mathcal{F}_t^{\overline{W}}=\mathcal{F}_t^\xi$$

的 Wiener 过程为 **更新过程**. 关于何时满足 (6-46) 式的过程为更新过程是一个重要而困难的问题. 显然, 如果 (6-47) 式存在唯一的强解, 则 $\mathcal{F}_t^\xi \subseteq \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$, 此时 $\overline{W}$ 便是更新过程.

下面对 $\xi_t$ 作进一步的假设.

## §6.5 Gauss 过程的情形

本节假设 Ito 过程 $\xi_t$ 满足

$$d\xi_t = \beta_t(\omega)dt + dW_t,\ \xi_0 = 0 \tag{6-53}$$

而 $\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t), t \leqslant T$ 为 Gauss(正态) 过程. 首先给出一个引理, 它本身也是很有意义的.

**6.12引理** 设 $\beta = \beta_t(\omega)$ 是可测的正态过程, 则

$$P\left(\int_0^T \beta_t^2 dt < \infty\right) = 1 \iff \int_0^T E\beta_t^2 dt < \infty$$

**证明** 参考文献 [2]7.2 引理. □

**6.13定理** 设 $\beta = (\beta_t(\omega), \mathcal{F}_t), 0 \leqslant t \leqslant T$ 为均方连续的正态过程, 则 $\mu_\xi \sim \mu_W$, 且

$$P(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)dt < \infty) = P(\int_0^T \alpha_t^2(W)dt < \infty) = 1 \tag{6-54}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W) = \exp\left(\int_0^t \alpha_s(W)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)ds\right) \tag{6-55}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi) = \exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\,d\xi_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)ds\right) \tag{6-56}$$

其中 $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_t)$ 满足

$$\alpha_t(\xi) = E(\beta_t(\omega)|\mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$$

**证明** 依假设，$\beta_t$ 均方连续，因此 $E\beta_t, E\beta_t^2$ 对 $t$ 连续，且

$$\int_0^T E\beta_t^2 \mathrm{d}t < \infty \tag{6-57}$$

因而，$P\left(\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t < \infty\right) = 1$, 由 6.3 定理，则得 $\mu_\xi \ll \mu_W$. 往证 Novikov 条件：

$$E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right) < \infty \tag{6-58}$$

在 $([0,T], L[0,T], \frac{\mathrm{d}t}{T})$ 上对凸函数 $h(x) = \mathrm{e}^{Tx/2}$ 应用 Jensen 不等式，则得

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \exp\{\frac{T}{2}\beta_t^2\}\mathrm{d}t$$

因此若 $T \leqslant 2\delta$, 则

$$E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E\exp\left\{\frac{T}{2}\beta_t^2\right\}\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\leqslant T} E\mathrm{e}^{\delta\beta_t^2}$$

为了证明 (6 − 58) 式，只要证明上式的右边小于无穷，而这由初等的计算可得到：

$$\sup_{t\leqslant T} E\mathrm{e}^{\delta\beta_t^2} = \sup_{t\leqslant T} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\delta(E\beta_t)^2}{1-2\delta D\beta_t}}}{\sqrt{1-2\delta D\beta_t}} < \infty$$

这样

$$E\exp\left(-\int_0^T \beta_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 \mathrm{d}t\right) = 1$$

由 6.1 定理，则 $\mu_\xi \sim \mu_W$. 由于

$$\int_0^T E\alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t = \int_0^T E\left[E(\beta_t|\mathcal{F}_t^\xi)\right]^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T E\beta_t^2\mathrm{d}t < \infty \tag{6-59}$$

以及 $\mu_\xi \sim \mu_W$, (6 − 54) 式得证. 从而由定理 6.1 得知 (6 − 55), (6 − 56) 式成立. □

现在放弃 Gauss 过程 $\beta_t$ 均方连续的假定.

**6.14定理** 设上述 $\beta$ 为 Gauss 过程，且

$$P\left(\int_0^T \beta_t^2\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \tag{6-60}$$

则 1) $\mu_\xi \ll \mu_W$, 且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,W) = \exp\left(\Gamma_t(\alpha_t(W)) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\mathrm{d}s\right) \tag{6-61}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(t,\xi) = \exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\,\mathrm{d}\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\mathrm{d}s\right) \tag{6-62}$$

2) 如果还假定 $(\beta, W) = (\beta_t, W_t), t \leqslant T$ 为 Gauss 系 (联合正态)，则 $\forall t \leqslant T$,

$$\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$$

其中更新过程 $\overline{W}$, 满足

$$\overline{W}_t = \xi_t - \int_0^t \alpha_s(\xi)\mathrm{d}s, \alpha_t(\xi) = E(\beta_t|\mathcal{F}_t^\xi) \tag{6-63}$$

此时如果鞅 $X = (X_t, \mathcal{F}_t^\xi), t \leqslant T$ 与 $(\beta, W)$ 联合正态，则

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}\overline{W}_s \tag{6-64}$$

其中 $f(s)$ 为确定性函数，满足 $\int_0^T f^2(s)\mathrm{d}s < \infty$.

**证明** 由条件 (6 − 60) 式，引理 6.12, 得到 (6 − 59) 式成立. 所以有 $\mu_\xi \ll \mu_W$. 而 6.7 定理表明，(6 − 61) 式，(6 − 62) 式成立.

显然 $\mathcal{F}^{\overline{W}_t} \subseteq \mathcal{F}_t^\xi$, 往证反包含. 注意到对每个 $t \leqslant T, \eta \triangleq \alpha_t(\xi) \in \mathcal{F}_t^\xi$, 而 $\xi_t = \int_0^t \beta_s \mathrm{d}s + W_t$, 因此 $\xi_t$ 与 $W_t$ 的任意线性组合还是 $\beta_s, s \leqslant t$ 与 $W_t$ 的线性组合，表明 $(\beta, \xi)$ 是联合正态. 由正态相关 5.12 定理，作为条件期望的 $\eta$ 与 $(W, \xi)$ 仍然联合正态. 于是由 5.25 定理，

$$\alpha_t(\xi) = E\alpha_t(\xi) + \int_0^t G(t,s)\mathrm{d}\overline{W}_s$$

其中确定性函数 $G(t,s)$ 满足 $\int_0^t G^2(t,s)\mathrm{d}s < \infty$. 在所考虑的 $\sigma$ 代数均完备的条件下，$\alpha_t(\xi) \in \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$, 于是由 (6 − 59) 式，$\mathcal{F}_t^\xi \subseteq \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$, 此即 $\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$. 由下面关于扩散泛函的结构以及 $E\alpha_t^2(\xi) \leqslant E\beta_t^2$, 得到 $P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$, (5 − 69) 式得证. □

## §6.6 Ito 过程的测度关于扩散过程测度的绝对连续性

一般的 Ito 过程形如

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a_s(\omega)\mathrm{d}s + \int_0^t b_s(\omega)\mathrm{d}W_s,\ t \leqslant T \tag{6 − 65}$$

其中

$$\int_0^T |a_s(\omega)|\mathrm{d}s < \infty, \int_0^T b_s^2(\omega)\mathrm{d}s < \infty \tag{6-66}$$

当 $a_s, b_s \in \mathcal{F}_s^\xi$ 时，称 $\xi$ 为扩散过程. 前面在 $b_s(\omega) \equiv 1$ 是讨论了 Ito 过程关于 $\overline{W}$ 为扩散的条件，并给出了 Ito 过程测度关于扩散过程测度的绝对连续性及 R-N 导数. 现在讨论一般情形.

**6.15定理** 设有 Ito 过程 $\xi$ 满足 (6－65) 式， (6－66) 式, $\nu = (\nu_t, \mathcal{F}_t), t \leqslant T$ 为 Wiener 过程，且与 $W, a, b$ 独立、满足

$$\int_0^T E|a_t(\omega)|\mathrm{d}t < \infty \tag{6-67}$$

则

(1) 存在可测泛函 $A = (A_t(x), \mathcal{B}_{t+}), B = (B_t(x), \mathcal{B}_{t+}), t \leqslant T$ 满足

$$A_t(\xi) = E(a_t|\mathcal{F}_t^\xi) \tag{6-68}$$

$$B_t(\xi) = \sqrt{b_t^2(\omega)} \tag{6-69}$$

(2) 存在一个 Wiener 过程 $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^{\xi,\nu}), t \leqslant T$ 使得 $\xi$ 为关于 $\overline{W}$ 的扩散:

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t A_s(\xi)\,\mathrm{d}s + \int_0^t B_t(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_s \tag{6-70}$$

如果还假定 $\forall t \leqslant T, b_t^2(\omega) > 0$,a.s., 则 $\overline{W}_t \in \mathcal{F}_t^\xi$, 此时 $\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^{\overline{W}}, t \leqslant T$.

**证明** 1) 由 (6-67) 式不妨设对一切 $t \leqslant T, E|a_t(\omega)| < \infty$. 由引理 6.0 存在可测泛函 $A = (A_t(x), \mathcal{B}_{t+})$ 使得

$$A_t(\xi) = E(a_t|\mathcal{F}_t^\xi) \tag{6-71}$$

为了证明 (6−69) 式，只要证明 $b_t^2 \in \mathcal{F}_t^{\xi}$. 为此考虑 Ito 过程 $\xi$ 的平方变差，也即考虑 $[0,t]$ 区间的有限分割 $\pi_t^n: 0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = t$. 可以证明

$$[\xi]_t = \int_0^t b_s^2(\omega)\mathrm{d}s \tag{6-72}$$

事实上,上式左端定义为下面和式当分割的直经 $\delta\pi_t \triangleq \max_j|t_{j+1}^n - t_j^n| \to 0$ 时的极限:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[\xi_{t_{j+1}^n} - \xi_{t_j^n}\right]^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} a_s(\omega)\mathrm{d}s\right)^2$$

$$+2\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} b_s(\omega)\mathrm{d}W_s\right)\left(\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} a_s(\omega)\mathrm{d}s\right)$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} b_s(\omega)\mathrm{d}W_s\right)^2$$

容易验证前两项依概率趋于 0, 而第三项由 Ito 公式

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} b_s(\omega)\mathrm{d}W_s\right)^2$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} b_s^2(\omega)\mathrm{d}s + 2\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n}\left(\int_{t_j^n}^{s} b_u(\omega)\mathrm{d}W_u\right)b_s(\omega)\mathrm{d}W_s$$

$$= \int_0^t b_s^2(\omega)\mathrm{d}s + 2\int_0^t f_n(s)b_s(\omega)\mathrm{d}W_s$$

其中 $f_n(s) = \int_{t_j^n}^{s} b_u(\omega)\mathrm{d}W_u, t_j^n \leqslant s < t_{j+1}^n$. 而从

$$\int_0^T f_n^2(s)b_s^2(\omega)\mathrm{d}s \leqslant \left(\max_j \sup_{t_j^n \leqslant s < t_{j+i}^n} f_n^2(s)\right)\int_0^T b_s^2(\omega)\mathrm{d}s \to 0$$

可推出

$$\int_0^t f_n(s)b_s(\omega)\mathrm{d}W_s \xrightarrow{P} 0$$

这样 (6－65) 式得证，从而 $\forall t \leqslant T, \int_0^t b_s^2(\omega)\mathrm{d}s \in \mathcal{F}_t^\xi$. 由 5.4 引理，存在一个过程 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_s, \mathcal{F}_s^\xi), s \leqslant t$, 使得 $\widetilde{B}_s^2(\omega) = b_s^2(\omega)$a.s., 而又由 6.0 引理，存在可测泛函 $(B_t(x), b_t)$, 使 (6－66) 式成立.

2) 考虑如下定义的过程 $\eta = (\eta_t, \mathcal{F}_t^\xi)$:

$$\eta_t = \xi_t - \xi_0 - \int_0^t A_s(\xi)\mathrm{d}s \tag{6-73}$$

停时

$$\tau_n = \inf\left\{t : \int_0^t B_s^2(\xi)\mathrm{d}s + \sup_{s\leqslant t} |\eta_s| \geqslant n\right\}, \ \inf\varnothing = \infty$$

以及 $\eta_t^n = \eta_t^{\tau_n}$. 可以证明 $\eta^n$ 是平方可积鞅. 事实上，

$$\begin{aligned}
E(\eta_t^n - \eta_s^n|\mathcal{F}_s^\xi) = {} & E\left(\int_s^t I_{(\tau_n\geqslant u)}(a_u(\omega) - A_u(\xi))\,\mathrm{d}u|\mathcal{F}_s^\xi\right) \\
& +E\left(\int_s^t I_{(\tau_n\geqslant u)}b_u(\omega)\,\mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_s^\xi\right) \\
= {} & E\left(\int_s^t I_{(\tau_n\geqslant u)}E(a_u(\omega) - A_u(\xi)|\mathcal{F}_u^\xi)\,\mathrm{d}u|\mathcal{F}_s^\xi\right) \\
& +E\left[E\left(\int_s^t I_{(\tau_n\geqslant u)}b_u(\omega)\mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_s\right)|\mathcal{F}_s^\xi\right] \\
= {} & 0
\end{aligned}$$

而由 Ito 公式，

$$(\eta_t^n)^2 = 2\int_0^{t\wedge\tau_n} \eta_s\,\mathrm{d}\eta_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} b_s^2(\omega)\mathrm{d}s$$

所以

$$< \eta^n >_t = \int_0^{t\wedge\tau_n} B_s^2(\xi)\mathrm{d}s$$

考虑 $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^{\xi,\nu}), t \leqslant T$ 如下:

$$\overline{W}_t = \int_0^t B_s^+(\xi)\mathrm{d}\eta_s + \int_0^t [1 - B_s^+(\xi)B_s(\xi)]\mathrm{d}\nu_s \qquad (6-74)$$

对 $\mathrm{e}^{iz\overline{W}_{t\wedge\tau_n}}$ 应用 Ito 公式，再取条件期望 $E(\cdot|\mathcal{F}_s^{\xi,\nu})$, 并令 $n \to \infty$, 得到

$$E\left(\mathrm{e}^{iz(\overline{W}_t - \overline{W}_s)}|\mathcal{F}_s^{\xi,\nu}\right) = \mathrm{e}^{-(z^2/2)(t-s)}$$

于是 $\overline{W}$ 为 Wiener 过程.

由 (6 − 73) 式,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t B_s(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_s \\
&= \int_0^t B_s(\xi)B_s^+(\xi)\mathrm{d}\xi_s - \int_0^t B_s(\xi)B_s^+(\xi)A_s(\xi)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t B_s(\xi)[1 - B_s(\xi)B_s^+(\xi)]\mathrm{d}\nu_s \\
&= \int_0^t B_s(\xi)B_s^+(\xi)\mathrm{d}\xi_s - \int_0^t B_s(\xi)B_s^+(\xi)A_s(\xi)\mathrm{d}s \\
&= \xi_t - \xi_0 - \int_0^t A_s(\xi)\mathrm{d}s - \zeta_t
\end{aligned} \qquad (6-75)$$

其中 $\zeta_t = \int_0^t \left[1 - B_s(\xi)B_s^+(\xi)\right] \mathrm{d}\eta_s$ 关于 $\mathcal{F}_t^{\xi,\nu}$ 为局部平方可积鞅, 且由

$$E\sup_{t\leqslant T}\zeta_{t\wedge\tau_n}^2 \leqslant 4E\int_0^{T\wedge\tau_n} (1 - B_s^+(\xi))B_s^2(\xi)\mathrm{d}s = 0$$

所以

$$P\left(\sup_{t\leqslant T}|\zeta_t|=0\right)\leqslant P(\tau_n\leqslant T)\to 0.$$

于是 (6 − 70) 式得证. 而当 $B_t^2(\omega)>0$, 则由 $\overline{W}$ 的定义 (6 − 74), 其第二个积分为 0, 故 $\overline{W}_t\in\mathcal{F}_t^\xi$, 此时 $\mathcal{F}_t^{\overline{W}}=\mathcal{F}_t^\xi$,$\overline{W}$ 是更新过程. □

下面是 Ito 过程测度关于扩散过程测度的绝对连续性，它是 6.1 定理的推广.

**6.16定理** 设 $\xi=(\xi_t,\mathcal{F}_t),t\leqslant T$ 是 Ito 过程，满足

$$\mathrm{d}\xi_t=a_t(\omega)\mathrm{d}t+B_t(\xi)\mathrm{d}W_t \tag{6-76}$$

而扩散过程 $\eta$ 满足

$$\mathrm{d}\eta_t=A_t(\eta)\mathrm{d}t+B_t(\eta)\mathrm{d}W_t,\eta_0=\xi_0 \tag{6-77}$$

$\xi_0\in\mathcal{F}_0$,a.s. 有限. 并且

(1) $A_t(x),B_t(x)$ 满足 Lipschiz 条件与线性增长条件，使得方程 (6 − 77) 存在唯一的强解.

(2) $\forall t\leqslant T$, 关于 $\alpha_t(\omega)$ 的方程

$$B_t(\xi)\alpha_t(\omega)=a_t(\omega)-A_t(\xi) \tag{6-78}$$

存在有界解.

(3)

$$P\left(\int_0^T\alpha_t^2(\omega)\mathrm{d}t<\infty\right)=1 \tag{6-79}$$

(4)

$$E\exp\left(-\int_0^T\alpha_t(\omega)\mathrm{d}W_t-\frac{1}{2}\int_0^T\alpha_t^2(\omega)\mathrm{d}t\right)=1 \tag{6-80}$$

则 $\mu_\xi \sim \mu_\eta$, 且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\eta}{\mathrm{d}\mu_\xi}(\xi) = E\left\{\exp\left(-\int_0^T \alpha_t(\omega)\,\mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_t^2(\omega)\mathrm{d}t\right)|\mathcal{F}_T^\xi\right\} \tag{6-81}$$

**证明** 首先 (6 − 78) 式有解

$$\alpha_t(\omega) = B_t^+(\xi)[a_t(\omega) - A_t(\xi)] \tag{6-82}$$

这里 $B_t^+(\xi) = \begin{cases} B_t^{-1}(\xi), & B_t(\xi) \neq 0 \\ 0, & B_t(\xi) = 0 \end{cases}$ 记

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\omega)\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\omega)\mathrm{d}s\right) \\ \mathrm{d}\widetilde{P} &= Z_T\mathrm{d}P \end{aligned}$$

由 (6 − 79) 式及 Girsanov 定理

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \alpha_s(\omega)\mathrm{d}s$$

是 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \widetilde{P})$ 的 Wiener 过程. 容易验证

$$\eta_0 + \int_0^t A_s(\xi)\mathrm{d}s + \int_0^t B_s(\xi)\mathrm{d}\widetilde{W}_s = \xi_t$$

这表明 $\xi_t$ 在测度 $\widetilde{P}$ 下满足 $\eta$ 在测度 $P$ 下的方程 (6-76)(弱解), 因此它们同分布, 即 $\forall A \in \mathcal{B}_T, \widetilde{P}(\xi \in A) = P(\eta \in A)$. 这样

$$\begin{aligned} \mu_\eta(A) &= \widetilde{P}(\xi \in A) = \int_{(\omega:\xi(\omega)\in A)} Z_T(\omega)\mathrm{d}P \\ &= \int_A E(Z_T|\mathcal{F}_T^\xi)|_{\xi=x}\mathrm{d}\mu_\xi(x) \end{aligned}$$

所以 $\mu_\eta \ll \mu_\xi$. 如同定理 6.1 可证明 $\mu_\xi \ll \mu_\eta$, 事实上, 由 (6 − 79) 式可知 $P(Z_T = 0) = 0$, 于是 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\widetilde{P}} = Z_T^{-1}, P\text{−a.s.}\forall A \in B_t$,

$$\begin{aligned}
\mu_\xi(A) &= P(\omega : \xi \in A) = \int_{\{\xi\in A\}} Z_T^{-1}\mathrm{d}\widetilde{P} \\
&= \int_{\{\xi\in A\}} \widetilde{E}(Z_T^{-1}|\mathcal{F}_T^\xi)\widetilde{P} \\
&= \int_A \widetilde{E}(Z_T^{-1}|\mathcal{F}_T^\xi)|_{\xi=x}\mathrm{d}\mu_\eta(x) \\
&= \int_A \widetilde{E}\,(Z_T^{-1}|\mathcal{F}_T^\xi)\mathrm{d}\mu_\eta(x)
\end{aligned}$$

□

**例.** 设扩散过程

$$\mathrm{d}\xi_t = \xi_t(\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t), \xi_0 = \eta_0, \mathrm{d}\eta_t = \eta_t\mathrm{d}W_t$$

其中 $P(\eta_0 = 0) > 0$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_\eta}(\eta) &= (1 - \eta_0\eta_0^+) + \eta_0^+\eta_T \\
\frac{\mathrm{d}\mu_\eta}{\mathrm{d}\mu_\xi}(\xi) &= ((1 - \xi_0\xi_0^+) + \xi_0^+\xi_T)^{-1}
\end{aligned}$$

**6.17推论** 设 $\xi$ 为扩散过程满足

$$\mathrm{d}\xi_t = a_t(\xi)\mathrm{d}t + B_t(\xi)\mathrm{d}W_t, \xi_0 = \eta_0 \qquad (6-83)$$

扩散过程 $\eta$ 仍然满足 (6 − 77) 式, 6.16 定理中的条件 (1), (2), (4)

满足，且

$$P\left(\int_0^T [B_s^+(\xi)a_s(\xi)]^2 \mathrm{d}s < \infty\right)$$
$$= P\left(\int_0^T [B_s^+(\xi)A_s(\xi)]^2 \,\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \qquad (6-84)$$

则 $\mu_\xi \sim \mu_\eta$(对比定理 6.1 的推论),

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\eta}{\mathrm{d}\mu_\xi}(\xi) = \exp\Big\{-\int_0^T (B_s^+(\xi))^2[a_s(\xi) - A_s(\xi)]\mathrm{d}\xi_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T (B_s^+(\xi))^2[a_s^2(\xi) - A_s^2(\xi)]\mathrm{d}s\Big\} \qquad (6-85)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_\eta}(\eta) = \exp\Big\{\int_0^T (B_s^+(\eta))^2[a_s(\eta) - A_s(\eta)]\mathrm{d}\eta_s$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T (B_s^+(\eta))^2[a_s^2(\eta) - A_s^2(\eta)]\mathrm{d}s\Big\} \qquad (6-86)$$

**证明** 注意定理 6.16 中 $\alpha_t(\omega)$ 此时应改为 $\alpha_t(\xi)$, 从而 (6−81) 式中的指数式为 $\mathcal{F}_T^\xi$ 可测，所以有 (6-85) 式．注意到 $\mu_\xi \sim \mu_\eta$ 以及

$$\int_0^T (B_s^+(\xi))^4[a_s(\xi) - A_s(\xi)]^2 B_s^2(\xi)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \int_0^T (B_s^+(\xi))^2(\alpha_s(\xi))^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \int_0^T (\alpha_s(\xi))^2\mathrm{d}s < \infty$$

保证了 (6 − 85) 、 (6 − 86) 式出现的积分有意义． □

下面的 $\eta$ 更复杂一点.

**6.18定理** 要求 6.16 定理中的扩散过程 $\eta$ 满足 $\mathrm{d}\eta_t = A_t(\eta)\mathrm{d}t + B_t(\eta)\mathrm{d}W_t$,6.16 定理中的条件 (1), (2) 满足，且

$$P\left(\int_0^T (B_s^+(\xi))^2[\mathcal{A}_s^2(\xi) + A_s^2(\xi)]\mathrm{d}s < \infty\right)$$

$$= P\left(\int_0^T (B_s^+(\eta))^2[\mathcal{A}_s^2(\eta) + A_s^2(\eta)]\,\mathrm{d}s < \infty\right) \qquad (6-87)$$

则 $\mu_\xi \sim \mu_\eta$, 且它们的 $R-N$ 导数由 (6 − 85) 式， (6 − 86) 式给出.

**证明** 略，见文献 [2] 定理 7.19, 在那里还给出多维情形的结果. □

# 第七章　滤波、内插与外推

本章以介绍滤波理论为主，同时也涉及内插与外推.

在一个随机系统中，我们认为系统的状态接受各种随机干扰，所以它的状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = a(t, X_t) + b(t, X_t)N_t$$

第一项表示系统的物理的确定性特征，而第二项表明系统的随机干扰. 其中 $N_t$ 通常称为白噪声，它被认为是一个相互独立，且同服从正态分布的随机变量. Ito 认为上面的状态方程可用随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = a(t, X_t)\mathrm{d}t + b(t, X_t)\mathrm{d}B_t$$

来描述. 当然实际问题是否可以这样描述，这就要靠由此导出的结果与实际数据的吻合来判定. 一般系统的状态是不可观测的，而观测到的过程 $\xi_t$ 也受随机干扰，同样用随机微分方程来描述：

$$\mathrm{d}\xi_t = c(t, X_t)\mathrm{d}t + \gamma(t, X_t)\mathrm{d}W_t,\ \xi_0 = 0$$

假定 $X_0, B_t, W_t$ 相互独立. 令 $\mathcal{F}_s^\xi = \sigma(\xi_u, u \leqslant s)$，它包含了当前时间 $s$ 之前所获得的全部信息. 我们要根据观测值 $\xi_u, u \leqslant s$，求得 $X_t$ 的最优无偏估计 $\widehat{X}_t$，即使得

$$\inf E|X_t - \widehat{X}_t|^2 \tag{7-1}$$

亦即通常所谓的最小方差无偏估计.

当 $t=s$ 时，所论的问题称为滤波；当 $t<s$ 时，称为内插 (也称平滑)；而当 $t>s$ 称为外推 (也称预报).

记

$$\mathcal{H}=\{Y\in L^2(P):Y\in\mathcal{F}_t^\xi\}$$

首先我们有滤波的基本定理.

**7.1定理**

$$\widehat{X}_t=E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)=\pi_{\mathcal{H}}(X_t)$$

这里及今后 $\pi_H$ 均表示从 Hilbert 空间 $L^2(P)$ 向子空间 $H$ 的投影.

**证明** 首先 $E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)\in\mathcal{F}_t^\xi$. 而且对于任意的 $Y_t\in\mathcal{F}_t^\xi$,

$$\begin{aligned}E(X_t-Y_t)^2&=E(X_t-E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi))^2+E\left(E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)-Y_t\right)^2\\&\quad+2E(X_t-E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi))(E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)-Y_t)\\&\geqslant E(X_t-E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi))^2\end{aligned}$$

故 $E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)$ 满足 (7-1) 式. 其次我们可证明条件期望 $E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)=\pi_{\mathcal{H}}X_t$. 事实上， $\pi_{\mathcal{H}}X_t\in\mathcal{F}_t^\xi$, 且由投影的正交性,

$$\forall Y\in\mathcal{H},EY(X-\pi_{\mathcal{H}}(X_t))=0$$

特别取 $Y=I_A,A\in\mathcal{F}_t^\xi$, 则

$$\int_A X_t\mathrm{d}P=\int_A\pi_{\mathcal{H}}(X_t)\mathrm{d}P$$

所以 $\pi_{\mathcal{H}}(X_t)=E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)$. □

定理表明，$X_t$ 的最小方差无偏估计就是条件期望 $E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)$，也就是 $X_t$ 向子空间 $\mathcal{H}$ 的投影. 下面详细地推导 $\widehat{X}_t$ 所满足的随

机微分方程，在离散时间情形它就是一种递推关系．我们先讨论一维的线性滤波问题．

## §7.1 线性滤波

假设系统状态与观测系统满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = a(t)X_t\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}U_t & a(t) \in R^{n\times n}, b(t) \in R^{n\times p} \\ \mathrm{d}\xi_t = A(t)X_t\mathrm{d}t + B(t)\mathrm{d}V_t, & A(t) \in R^{m\times n}, B(t) \in R^{m\times r} \end{cases} \tag{7-2}$$

其中 $U_t, V_t$ 分别是 $p, r$ 维 Brownian 运动，两者相互独立．

假设上述的 $a(t), b(t), A(t), B(t)$ 均为一维的确定性函数，且在 $[0,T]$ 上 $a(t), A(t)$ Lebesgue 绝对可积，而 $b(t), B(t)$ Lebesgue 平方可积， $\xi_0 = 0, X_0$ 正态，且与 $U_t, V_t$ 独立， $B(t) \geqslant C > 0$，这些条件保证了 $\forall t, E\xi_t^2 < \infty, EX_t^2 < \infty$．

下面分几步来讨论线性滤波问题．

1．令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, t)$ 为形如 $c_0 + c_1\xi_{s_1}(\omega) + \cdots + c_n\xi_{s_n}(\omega)$ 的线性组合在 $L^2(P)$ 上的闭包，其中 $c_j$ 为常数， $0 < s_j \leqslant t$．我们要证明

$$\widehat{X}_t \triangleq \pi_{\mathcal{K}}(X_t) = \pi_{\mathcal{L}}(X_t) \tag{7-3}$$

亦即最佳估计即最佳线性估计．

2．用更新过程 $N_t$ 代替 $\xi_t$，

$$N_t = \xi_t - \int_0^t (\widehat{AX})_s \mathrm{d}s \tag{7-4}$$

其中 $\widehat{AX}_s = \pi_{\mathcal{L}(\xi,s)}(A(s)X_s) = A(s)\widehat{X}_s$，我们要证

① $N_t$ 与下面的 $\overline{W}_t$ 都称为更新过程．

(1) $N_t$ 有正交增量.

(2) $\mathcal{L}(N,t)=\mathcal{L}(\xi,t)$.

从而

$$\widehat{X}_t=\pi_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t) \tag{7-5}$$

3. 解线性随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t=a(t)X_t\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}U_t \tag{7-6}$$

4. 令

$$\mathrm{d}\overline{W}_t=\frac{1}{B(t)}\mathrm{d}N_t \tag{7-7}$$

往证 $\overline{W}_t$ 是一维 Brownian 运动，而且 $\mathcal{F}_t^{\overline{W}}\triangleq\sigma(\overline{W}_s,s\leqslant t)=\mathcal{F}_t^{\xi}$，因此称 $\overline{W}_t$ 为更新过程. 且

$$\mathcal{L}(N,t)=\mathcal{L}(\overline{W},t)$$

从而

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t&=\pi_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t)=\pi_{\mathcal{L}(\overline{W},t)}(X_t)\\&=EX_t+\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}E(X_t\overline{W}_s)\mathrm{d}\overline{W}_s\end{aligned} \tag{7-8}$$

5. 最后得到关于滤波 $\widehat{X}_t$ 的方程以及关于滤波误差的 Riccati 方程.

下面逐步实行上述的 5 个步骤.

**7.2引理** 假设 $X_t$ 及 $\xi_s,s\leqslant T$ 皆平方可积，且 $(X_t,\xi_{s_1},\cdots,\xi_{s_n})$ 联合正态，则

$$\widehat{X}_t\triangleq\pi_{\mathcal{H}}(X_t)=\pi_{\mathcal{L}}(X_t) \tag{7-9}$$

**证明** 定理 1 表明 $\widehat{X}_t = E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)$, 记 $\delta = \dfrac{t}{2^n}$, 在 $[0,t]$ 考虑二进制分割 $t_0 = 0 < \delta < 2\delta \cdots < 2^n\delta = t$. 令 $\mathcal{F}_{n,t}^\xi = \sigma(\xi_{j\delta} : 1 \leqslant j \leqslant 2^n)$, 显然当 $n \to \infty$ 时, $\mathcal{F}_{n,t}^\xi \uparrow \mathcal{F}_t^\xi$. 于是

$$\widehat{X}_t = \lim_{n\to\infty} E(X_t|\mathcal{F}_{n,t}^\xi)$$

在定理的假设下, $(X_t, \xi_0, \xi_\delta, \cdots, \xi_{2^n\delta})$ 联合正态, 因此由回归的线性性,

$$E(X_t|\mathcal{F}_n^\xi) = \sum_{j=0}^{2^n} c_j \xi_{j\delta}$$

而由平方可积性,

$$\widehat{X}_t = \mathrm{l.i.m} \sum_{j=0}^{2^n} c_j \xi_{j\delta}$$

这说明 $\widehat{X}_t = \pi_{\mathcal{H}}(X_t) \in \mathcal{L}$, 而 $\widetilde{X}_t = X_t - \widehat{X}_t$ 与 $\mathcal{H}$ 正交, 更与 $\mathcal{L}$ 正交, 这意味着 $\widehat{X}_t = \pi_{\mathcal{L}}(X_t)$, $(7-9)$ 式得证, 也即此时的线性无偏估计就是最小方差无偏估计. □

下面的结果保证了 7.2 引理的条件成立.

**7.3引理** $M_t = (X_t, \xi_t)' \in R^2$ 为正态过程.

**证明**

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_t &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}X_t \\ \mathrm{d}\xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ A(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ \xi_t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &\quad + \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}B_t \\ &= H(t)M_t\mathrm{d}t + k(t)\mathrm{d}B_t \end{aligned} \tag{7-10}$$

其中

$$B_t = \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix}$$

由 Picard 逐次逼近法

$$M_t^{n+1} = M_0 + \int_0^t H(s) M_s^n \mathrm{d}s + \int_0^t k(s)\mathrm{d}B_s, M_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

可以归纳地证明 $M_t^n$ 为正态过程，而 $M_t^n \xrightarrow{L^2} M_t$，故 $M_t$ 为正态过程. □

下面要讨论 $\mathcal{L}(\xi, T)$ 的随机积分表示. $\forall f \in L^2([0,T])$，由于

$$\begin{aligned}
&E\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}\xi_t\right)^2 \\
&= E\left(\int_0^T f(t)A(t)X_t\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)B(t)\mathrm{d}V_t\right)^2 \\
&= E\left(\int_0^T f(t)A(t)X_t\mathrm{d}t\right)^2 + E\left(\int_0^T f(t)B(t)\mathrm{d}V_t\right)^2 \\
&\quad +2E\left(\int_0^T f(t)A(t)X_t\mathrm{d}t\int_0^T f(t)B(t)\mathrm{d}V_t\right)
\end{aligned}$$

注意到 $X_t \in \mathcal{F}_t^U$ 与 $(V_t)$ 独立，因此上式第三项为 0. 对第一项应用 Schwarz 不等式以及 $X_t$ 作为 $t$ 的连续函数 $E\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t < \infty$，而在第二项中应用 Ito 同构，不难得知存在常数 $A_1, A_2$ 使得

$$A_1\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant E\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}\xi_t\right)^2 \leqslant A_2\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t \quad (7-11)$$

**7.4引理**

$$\mathcal{L}(\xi,T)=\left\{c_0+\int_0^T f(t)\mathrm{d}\xi_t : f\in L^2([0,T]), c_0\in R\right\}$$

**证明** 记右边的集合为 $N(\xi,T)$, 往证

(1) $N(\xi,T)\subseteq\mathcal{L}(\xi,T)$;

(2) $N(\xi,T)$ 包含一切形如 $c_0+c_1\xi_{t_1}+\cdots+c_n\xi_{t_n}$ 的线性组合;

(3) $N(\xi,T)=\mathcal{L}(\xi,T)$.

(1) 当 $f$ 为连续函数, 则由

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}\xi_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n2^n} f\left(\frac{j}{2^n}\right)\left(\xi_{(j+1)2^{-n}}-\xi_{j2^{-n}}\right)$$

可知, 而一般的 Borel 可测函数可用连续函数逼近, 得证.

(2) 由于

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\xi_{t_i}=\sum_{j=0}^{n} c_j'\Delta\xi_j=\sum_{j=1}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} c_j'\,\mathrm{d}\xi_t$$

$$=\int_0^T\sum_{j=0}^{n-1} c_j' I_{(t_j,t_{j+1})}(t)\mathrm{d}\xi_t$$

其中 $c_0'=c_0, c_{j-1}'-c_j'=c_j, j=1,\cdots,n, \Delta\xi_j=\xi_{t_{j+1}}-\xi_{t_j}$.

(3) 对于每个 $g\in\mathcal{L}(\xi,T)$, 由 (2) 它可表为

$$g=\mathrm{l.i.m}\left(c_0+\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}\xi_t\right),\ f_n(\cdot)\in L^2[0,T]$$

由 (7−11) 式, 每个 $c_0+\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}\xi_t\in L^2(P)$. 从而 $\left\{\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}\xi_t\right\}$ 为 $L^2(P)$ 中的 Cauchy 序列, 由 (7 − 11) 式, $\{f_n(t)\}$ 为 $L^2([0,t])$

上的 Cauchy 列，故存在 $f(\cdot)\in L^2[0,T]$, 使

$$\int_0^T f_n(t)\mathrm{d}\xi_t \xrightarrow{L^2} \int_0^T f(t)\mathrm{d}\xi_t$$

这样， $g\in\mathcal{N}(\xi,T)$, 从而 $\mathcal{L}(\xi,T)\subseteq\mathcal{N}(\xi,T)$. □

**7.5引理**

(1) $N_t$ 有正交增量;

(2) $EN_t^2=\int_0^t B^2(s)\mathrm{d}s$;

(3) $\mathcal{L}(N,t)=\mathcal{L}(\xi,t)$;

(4) $N_t$ 是正态过程.

**证明** (1) 设 $s<t, Y\in\mathcal{L}(\xi,s)$, 有

$$\begin{aligned}
&E(N_t-N_s)Y\\
&=E\left(\int_s^t A(r)(X_r-\widehat{X}_r)\,\mathrm{d}r+\int_s^t B(r)\mathrm{d}V_r\right)Y\\
&=\int_s^t A(r)E(X_r-\widehat{X}_r)Y\mathrm{d}r+E\left(\int_s^t B(r)\mathrm{d}V_r\right)Y\\
&=E\left(\int_s^t B(r)\mathrm{d}V_r\right)EY
\end{aligned}\tag{7-12}$$

这是因为 $X_r-\widehat{X}_r\perp\mathcal{L}(\xi,r)\supseteq\mathcal{L}(\xi,s)$, 故第一项为0. 由于 $\int_s^t B(r)\mathrm{d}V_r$ $\in\sigma(V_r,r>s)$, 而 $Y\in\sigma(V_r,V_r,r\leqslant s)$, 所以积分与 $Y$ 独立.

特别取 $Y=N_u-N_v,\forall v<u\leqslant s<t$, (7-12) 式表明 $N_t$ 有正交增量.

(2) 由 Ito 公式

$$EN_t^2=E\int_0^t 2N_s\mathrm{d}N_s+\int_0^t B^2(s)\mathrm{d}s$$

由 $N_t$ 的正交增量性，第一个期望为 0, 从而 $EN_t^2 = \int_0^t B^2(s)\mathrm{d}s$.

(3) 由 $N_t = \xi_t - \int_0^t A(s)\widehat{X}_s\mathrm{d}s, \widehat{X}_s \in \mathcal{L}(\xi, s)$, 可见 $\mathcal{L}(N,t) \subseteq \mathcal{L}(\xi,t)$. 往证反包含：由于 $A(r)\widehat{X}_r = E(A(r)X_r|\mathcal{F}_r^\xi) \in \mathcal{L}(\xi,r)$, 因此存在 $g(r,s) \in L^2[0,r]$, 使得

$$A(r)\widehat{X}_r = c_r + \int_0^r g(r,s)\mathrm{d}\xi_s$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^t f(r)\mathrm{d}N_r &= \int_0^t f(r)\mathrm{d}\xi_r - \int_0^t f(r)A(r)\widehat{X}_r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^t f(s)\mathrm{d}\xi_s - \int_0^t f(r)\left[\int_0^r g(r,s)\mathrm{d}\xi_s\right]\mathrm{d}r \\ &\quad - \int_0^t f(r)c_r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^t \left[f(s) - \int_s^t f(r)g(r,s)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\xi_s \\ &\quad - \int_0^t f(r)c_r\mathrm{d}r \qquad (7-13)\end{aligned}$$

由 Volterra 积分方程理论，$\forall h \in L^2[0,t]$, 存在 $f \in L^2[0,t]$, 使得

$$f(s) - \int_s^t f(r)g(r,s)\,\mathrm{d}r = h(s)$$

特别取 $h(s) = I_{[0,t_1]}(s), 0 \leqslant t_1 \leqslant t$, 则由 (7-13) 式得

$$\int_0^t f(r)c_r\,\mathrm{d}r + \int_0^t f(s)\mathrm{d}N_s = \xi_{t_1}$$

于是 $\mathcal{L}(\xi,t) \subseteq \mathcal{L}(N,t)$ 得证.

(4) 因为 $N_t = \xi_t - \int_0^t A(s)\widehat{X}_s \mathrm{d}s$. 注意到 $\widehat{X}_t$ 是形如 $c_0 + c_1\xi_{s_1} + \cdots + c_k\xi_{s_k}, s_j \leqslant t$ 的均方极限, 故 $(\widehat{X}_{t_1}, \cdots, \widehat{X}_{t_n}), t_j \leqslant t$ 联合正态, 从而 $N_t$ 正态. □

**7.6引理** $\overline{W}_t$ 是一维 Brownian 运动, $\mathcal{F}_t(\overline{W}) = \mathcal{F}_t^\xi$.

**证明** 因为

(1) $\overline{W}_t$ 轨道连续;

(2) $\overline{W}_t$ 具正交增量;

(3) $\overline{W}_t$ 服从正态分布;

(4) $E\overline{W}_t = 0$, 往证 $E\overline{W}_t\overline{W}_s = t \wedge s$.

为此, 由 Ito 公式

$$\mathrm{d}\overline{W}_t^2 = 2\overline{W}_t \mathrm{d}\overline{W}_t + \mathrm{d}t$$

由 $\overline{W}_t$ 的正交增量性, $E\overline{W}_t^2 = t$. 所以当 $s < t$ 时,

$$E\overline{W}_t\overline{W}_s = E(\overline{W}_t - \overline{W}_s)\overline{W}_s + E\overline{W}_s^2 = s$$

因此 $\overline{W}_t$ 是 Brownian 运动. □

由以上引理, 我们得到

$$\widehat{X}_t = \pi_{\mathcal{L}(\overline{W},t)}(X_t) \tag{7-14}$$

为证第二个结论, 我们只需证明 $\mathcal{F}_t^N = \mathcal{F}_t^\xi$. 由 (7-4) 式, 可得 $\mathcal{F}_t^N \subseteq \mathcal{F}_t^\xi$. 而由 $\widehat{X}_s \in \pi_{\mathcal{L}(N,s)}(X_s) \in \mathcal{F}_s^N$, (7-4) 式表明 $\xi_t \in \mathcal{F}_t^N$. 所以我们称 $\overline{W}_t$ 为更新过程.

现在我们用 4.6 定理的方法解线性系统

$$\mathrm{d}X_t = a(t)X_t\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}U_t, X_0 = x_0$$

得到

$$X_t = X_0 e^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b(s) e^{\int_s^t a(u)du} dU_s$$

$$= e^{\int_s^t a(r)dr} X_s + \int_s^t e^{\int_r^t a(u)du} b(r) dU_r \qquad (7-15)$$

于是

$$EX_t = EX_0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$

记 $c_0(t) = EX_t$, 则

$$c_0'(t) = a(t)c_0(t) \qquad (7-16)$$

而且

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s e^{\int_s^t a(u)du}$$

于是,

$$E(X_t(X_s - \widehat{X}_s)) = E(E(X_t|\mathcal{F}_s)(X_s - \widehat{X}_s))$$

$$= e^{\int_s^t a(u)du} S(s) \qquad (7-17)$$

其中 $S(s) = E(X_s - \widehat{X}_s)^2$ 为估计的方差.

**7.7定理 (一维 Kalmann-Bucy 滤波方程)** 设有一维线性滤波问题:

$$\begin{cases} \text{线性系统} \\ dX_t = a(t)X_t dt + b(t)X_t dU_t \quad a(t) \in R^{n\times n}, b(t) \in R^{n\times p} \\ \text{观测系统} \\ d\xi_t = A(t)X_t\, dt + B(t) dV_t, \quad A(t) \in R^{m\times n}, B(t) \in R^{m\times r} \end{cases}$$

则最佳线性滤波 $\widehat{X}_t = E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)$ 满足

$$\mathrm{d}\widehat{X}_t = \left(a(t) - \frac{A^2(t)S(t)}{B^2(t)}\right)\widehat{X}_t\mathrm{d}t + \frac{A(t)S(t)}{B^2(t)}\mathrm{d}\xi_t,$$

$$\widehat{X}_0 = EX_0 \tag{7-18}$$

其中滤波误差 $S(t)$ 满足 Riccati 方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= 2a(t)S(t) - \frac{A^2(t)}{B^2(t)}S^2(t) + b^2(t), S(0) \\ &= E(X_0 - EX_0)^2 \end{aligned} \tag{7-19}$$

**证明** 由 (7-14) 式及 7.5 引理,

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t &= \pi_{\mathcal{L}(\overline{W},t)}(X_t) \\ &= c_0(t) + \int_0^t G(t,s)\,\mathrm{d}\overline{W}_s, G \in L^2[0,T]\end{aligned} \tag{7-20}$$

取期望得 $c_0(t) = E\widehat{X}_t = EX_t$. 由

$$X_t - \widehat{X}_t \perp \mathcal{L}(\overline{W},t) \Longrightarrow X_t - \widehat{X}_t \perp \int_0^t f(s)\mathrm{d}\overline{W}_s, (\forall f \in L^2[0,t])$$

所以

$$\begin{aligned}E\left(X_t\int_0^t f(s)\mathrm{d}\overline{W}_s\right) &= E\left(\widehat{X}_t\int_0^t f(s)\mathrm{d}\overline{W}_s\right) \\ &= E\left(\int_0^t G(t,s)\mathrm{d}\overline{W}_s\int_0^t f(s)\mathrm{d}\overline{W}_s\right) \\ &= \int_0^t f(s)G(t,s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

特别取 $f(r) = I_{[0,s]}(r)$, 则得

$$E(X_t\overline{W}_s) = \int_0^s G(t,r)\mathrm{d}r \tag{7-21}$$

这样 (7 − 8) 式得证.

由于

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{1}{B(s)}\mathrm{d}N_t = V(t) + \int_0^t \frac{A(s)}{B(s)}(X_s - \widehat{X}_s)\mathrm{d}s \tag{7-22}$$

故

$$\begin{aligned} E(X_t\overline{W}_s) &= \int_0^s \frac{A(r)}{B(r)}EX_t(X_r - \overline{X}_r)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^s \frac{A(r)S(r)}{B(r)}\mathrm{e}^{\int_r^t a(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \end{aligned}$$

对比 (7 − 21) 式，则得

$$G(t,s) = \frac{A(s)}{B(s)}S(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(r)\mathrm{d}r} \tag{7-23}$$

由 (7 − 20) 式 ,(7 − 16) 式 ,(7 − 22) 式，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{X}_t &= c_0'(t)\mathrm{d}t + G(t,t)\mathrm{d}\overline{W}_t + \int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}\overline{W}_s\mathrm{d}t \\ &= a(t)\widehat{X}_t\mathrm{d}t + \frac{A(t)S(t)}{B(t)}\mathrm{d}\overline{W}_t \\ &= \left(a(t) - \frac{A^2(t)S(t)}{B^2(t)}\right)\widehat{X}_t\mathrm{d}t + \frac{A(t)S(t)}{B^2(t)}\mathrm{d}\xi_t \end{aligned}$$

(7-18) 式得证.

往证 $S(t)$ 满足 Riccati 方程 (7 − 19). 由

$$S(t)=EX_t^2-E\widehat{X}_t^2=T(t)-(EX_t)^2-\int_0^t G^2(s,t)\mathrm{d}s \quad (7-24)$$

式中 $T(t)=EX_t^2$. 而由 (7-15) 式可得

$$T(t)=\mathrm{e}^{2\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}EX_0^2+\int_0^t \mathrm{e}^{2\int_s^t a(v)\mathrm{d}v}b^2(s)\mathrm{d}s$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}&=2a(t)\mathrm{e}^{2\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}EX_0^2+b^2(t)\\&\quad+\int_0^t 2a(t)\mathrm{e}^{2\int_s^t a(v)\mathrm{d}v}b^2(s)\mathrm{d}s\\&=2a(t)T(t)+b^2(t)\end{aligned}$$

代入 (7 − 24) 式,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}-2(EX_t)^2a(t)-G^2(t,t)\\&\quad-\int_0^t 2G(s,t)\frac{\partial}{\partial t}G(s,t)\,\mathrm{d}s\\&=2a(t)T(t)+b^2(t)-\frac{A^2(t)S^2(t)}{B^2(t)}\\&\quad-2\int_0^t G^2(s,t)a(t)\,\mathrm{d}s-2a(t)(EX_t)^2\\&=2a(t)S(t)+b^2(t)-\frac{A^2(t)S^2(t)}{B^2(t)}\end{aligned}$$

□

对于多维的情形，我们考虑 $k+l$ 为正态过程

$$(X_t,\xi_t)=((X_1(t),\cdots,X_k(t),(\xi_1(t),\cdots,\xi_l(t))),0\leqslant t\leqslant T$$

满足

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= [a_0(t)+a_1(t)X_t+a_2(t)\xi_t]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{2}b_i(t)\mathrm{d}W_i(t)\\
\mathrm{d}\xi_t &= [A_0(t)+A_1(t)X_t+A_2(t)\xi_t]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{2}B_i(t)\mathrm{d}W_i(t)
\end{aligned}$$

其中 $W_1(t),W_2(t)$ 为两个独立的 Wiener 过程， $x_0,\xi_0$ 与 $W_1,W_2$ 独立，在 $[0,T]$ 上 $a_i(t),A_i(t)$ 的元素绝对可积， $b_i(t),B_i(t)$ 的元素二次可积.

**7.8定理** 在上述假设条件下，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widehat{X}_t &= [a_0(t)+a_1(t)\widehat{X}_t+a_2(t)\xi_t]\mathrm{d}t\\
&\quad +[(b\circ B)(t)+S(t)A_1^*(t)]((B\circ B)(t))^{-1}\\
&\quad \times[\mathrm{d}\xi_t-(A_0(t)+A_1(t)\widehat{X}_t+A_2(t)\xi_t)\mathrm{d}t]\\
\dot{S}(t) &= a_1(t)S(t)+S(t)a_1^*(t)-[(b\circ B)(t)+S(t)A_1^*(t)]\\
&\quad \times[(b\circ B)(t)+S(t)A_1^*(t)]^*+(b\circ b)(t)
\end{aligned}$$

并且有初始条件 $\widehat{X}_0=E(X_0|\xi_0)$ 及 $S(0)=(S_{ij}(0))$,

$$S_{ij}(0)=E[(X_i(0)-\widehat{X}_i(0))(X_i(0)-\widehat{X}_i(0))^*]$$

其中

$$\begin{cases}
(b\circ b)(t)=b_1(t)b_1^*(t)+b_2(t)b_2^*(t)\\
(b\circ B)(t)=b_1(t)B_1^*(t)+b_2(t)B_2^*(t)\\
(B\circ B)(t)=B_1(t)B_1^*(t)+B_2(t)B_2^*(t)
\end{cases}$$

(证明见文献 [2] 定理 10.3)

文献 [2] 的 §10.4 还给出了当 $B\circ B$ 退化时的处理方法，这在实际应用中很有意义.

## §7.2 非线性滤波的一般方程

现在考虑非线性系统

$$\begin{cases} \text{非线性系统} \\ \mathrm{d}h_t = H(t,\omega)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}Y_t \\ \text{观测系统} \\ \mathrm{d}\xi_t = A_t(\omega)\mathrm{d}t + B_t(\xi)\mathrm{d}W_t \end{cases} \tag{7-25}$$

其中 $(Y_t,\mathcal{F}_t), t\leqslant T$ 为零初值鞅,

$$P\left(\int_0^T |A_t(\omega)|\mathrm{d}t<\infty\right)=1$$

$$P\left(\int_0^T B_t^2(\xi)\mathrm{d}t<\infty\right)=1$$

泛函 $B_t(x)\in\mathcal{B}_t, A, B$ 满足 Lipschitz 条件与线性增长条件，保证 $\xi_t$ 作为上述方程的强解而存在. 而 $\int_0^T|H_s|\mathrm{d}s<\infty, P\text{-a.s.}$

对于任意的随机过程 $\eta=(\eta_t,\mathcal{F}_t), t\leqslant T$, 我们记 $\pi_t(\eta)\triangleq E(\eta_t|\mathcal{F}_t^{\xi})$. 于是, $\widehat{h}_t=\pi_t(h)$.

**7.9定理 (最佳非线性滤波方程)** 在上述假设下，如果

$$\sup\nolimits_{0\leqslant t\leqslant T} E\,h_t^2<\infty \tag{7-26}$$

$$E\int_0^T H_t^2\mathrm{d}t < \infty \tag{7-27}$$

$$E\int_0^T A_t^2(\omega)\mathrm{d}t < \infty \tag{7-28}$$

$$B_t^2(x) \geqslant C > 0 \tag{7-29}$$

则有一般的非线性滤波方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\pi_t(h) = & \ \pi_t(H)\mathrm{d}t + \{\pi_t(D) \\ & + [\pi_t(hA) - \pi_t(h)\pi_t(A)]\, B_t^{-1}(\xi)\}\,\mathrm{d}\overline{W}_t\end{aligned} \tag{7-30}$$

其中 $\overline{W}_t$ 为更新过程，满足

$$\mathrm{d}\overline{W}_t = \frac{\mathrm{d}\xi_t - \pi_t(A)\mathrm{d}t}{B_t(\xi)} \tag{7-31}$$

而 $D = (D_t, \mathcal{F}_t)$, 满足

$$D_t = \frac{\mathrm{d} < Y, W >_t}{\mathrm{d}t} \tag{7-32}$$

在给出定理证明之前，我们先证明一个引理.

**7.10引理** 对于适应过程 $(p_t, \mathcal{F}_t)$, 如果 $\int_0^T E|p_t|\mathrm{d}t < \infty$, 则对 $\sigma$ 代数 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, 有

$$E\left(\int_0^t p_s\mathrm{d}s|\mathcal{G}\right) = \int_0^t E\,(p_s|\mathcal{G})\mathrm{d}s$$

**证明** 考虑任意的有界随机变量 $\lambda \in \mathcal{G}$, 由 Fubini 定理

$$E\left[\lambda E\left(\int_0^t p_s \mathrm{d}s|\mathcal{G}\right)\right] = E\left(\lambda\int_0^t p_s\mathrm{d}s\right) = \int_0^t E(p_s\lambda)\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^t E\left[\lambda E(p_s|\mathcal{G})\right]\mathrm{d}s$$
$$= E\left[\lambda\int_0^t E(p_s|\mathcal{G})\,\mathrm{d}s\right]$$

$\lambda \in \mathcal{G}$ 的任意性，引理得证. □

**7.9定理的证明** 由条件 (7 − 28) 式，(7 − 29) 式推出

$$\int_0^T E|A_t(\omega)|\mathrm{d}t < \infty, |B_t(x)| \geqslant \sqrt{C} > 0,$$

故由 6.15 定理可知 $(\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ 是 Wiener 过程，而 (7 − 29) 式保证了 $\forall t \leqslant T, \mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$. 于是

$$\mathrm{d}\xi_t = \pi_t(A)\mathrm{d}t + B_t(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_t \tag{7-33}$$

因此

$$\pi_t(h) = \pi_t(h_0) + E\left(\int_0^t H_s\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t^\xi\right) + E(Y_t|\mathcal{F}_t^\xi) \tag{7-34}$$

由鞅表示 5.13 定理，平方可积鞅 $(\pi_t(h_0), \mathcal{F}_t^\xi)$ 可表示为

$$\pi_t(h_0) = \pi_0(h) + \int_0^t g_s^h(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_s \tag{7-35}$$

其中 $E\int_0^T |g_s^h(\xi)|^2\mathrm{d}s < \infty, \pi_0(h) = E(h_0|\mathcal{F}_0^\xi)$. 由 5.22 定理，平方可积鞅 $(E(Y_t|\mathcal{F}_t^\xi), \mathcal{F}_t^\xi)$ 可表示为

$$E(Y_t|\mathcal{F}_t^\xi) = \int_0^t g_s^y(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_s \tag{7-36}$$

其中 $E\int_0^T |g_s^y(\xi)|^2, \mathrm{d}s < \infty$. 利用 7.10 引理可以证明

$$\left(E\left(\int_0^t H_s \mathrm{d}s | \mathcal{F}_t^\xi\right) - \int_0^t \pi_s(H)\mathrm{d}s, \mathcal{F}_t^\xi, t \leqslant T\right)$$

是平方可积鞅. 因此它可表示为

$$E\left(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}s | \mathcal{F}_t^\xi\right) - \int_0^t \pi_s(H)\,\mathrm{d}s = \int_0^t g_s^H(\xi)\,\mathrm{d}\overline{W}_s \qquad (7-37)$$

由 (7 − 34) 式以及 (7 − 35) 式, (7 − 36) 式, 我们得到

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(H)\mathrm{d}s + \int_0^t g_s(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_s \qquad (7-38)$$

式中 $g_s(\xi) = g_s^x(\xi) + g_s^y(\xi) + g_s^H(\xi), E\int_0^T |g_s(\xi)|^2 \mathrm{d}s < \infty$. 往证:

$$g_s(\xi) = \pi_s(D) + [\pi_s(hA) - \pi_s(h)\pi_s(A)]\, B_s^{-1}(\xi) \qquad (7-39)$$

记 $\overline{y}_t = \int_0^t g_s(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_s, \overline{z}_t = \int_0^t \lambda_s(\xi)\,\mathrm{d}\overline{W}_s$, 其中 $|\lambda_s(\xi)| \leqslant C$(常数), 则

$$E\overline{y}_t\overline{z}_t = E\int_0^t g_s(\xi)\lambda_s(\xi)\mathrm{d}s \qquad (7-40)$$

将它应用到

$$\overline{y}_t = \pi_t(h) - \pi_0(h) - \int_0^t \pi_s(H)\mathrm{d}s$$

注意到 $E(\overline{z}_t|\mathcal{F}_0^\xi) = \overline{z}_0 = 0$, 故

$$E\overline{z}_t\pi_0(h) = E\left[E(\overline{z}_t|\mathcal{F}_0^\xi)\pi_0(h)\right] = 0,$$

以及

$$E\overline{z}_t \int_0^t \pi_s(H)\mathrm{d}s = \int_0^t E\left[\overline{z}_t \pi_s(H)\right]\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t E\left[\pi_s(H)E(\overline{z}_t|\mathcal{F}_s^\xi)\right]\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t E\overline{z}_s \pi_s(H)\mathrm{d}s$$

从而

$$E\overline{y}_t\overline{z}_t = E\overline{z}_t\pi_t(h) - \int_0^t E\overline{z}_s\pi_s(H)\mathrm{d}s$$

$$= E\overline{z}_t\pi_t(h) - \int_0^t E[\overline{z}_s E(H_s|\mathcal{F}_s^\xi)]\mathrm{d}s$$

$$= E\left[\overline{z}_t h_t - \int_0^t \overline{z}_s H_s \mathrm{d}s\right] \tag{7-41}$$

由 (7 − 25) 式， (7 − 31) 式

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\xi_s - \pi_s(A)\,\mathrm{d}s}{B_s(\xi)} = W_t + \int_0^t \frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s$$

记 $z_t = \int_0^t \lambda_s(\xi)\mathrm{d}W_s$, 从而

$$\overline{z}_t = z_t + \int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,\mathrm{d}s$$

(7-41) 式,

$$
\begin{aligned}
E\overline{y}_t\overline{z}_t &= E(\overline{z}_t h_t - \int_0^t \overline{z}_s H_s \mathrm{d}s) \\
&= E(z_t h_t - \int_0^t z_s H_s)\mathrm{d}s \\
&\quad + E\left[h_t \int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{A_s(\omega)-\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\right] \\
&\quad - E\int_0^t \left\{\int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u(\omega)-\pi_u(A)}{B_u(\xi)}\,\mathrm{d}u H_s \mathrm{d}s\right\} \qquad (7-42)
\end{aligned}
$$

过程 $(z_t, \mathcal{F}_t)$ 是零初值平方可积鞅,

$$
Ez_t h_0 = E(h_0 E(z_t|\mathcal{F}_0)) = Eh_0 z_0 = 0
$$

$$
E\int_0^t z_s H_s \mathrm{d}s = E\int_0^t (E(z_t|\mathcal{F}_s)H_s)\mathrm{d}s = E\left(z_t \int_0^t H_s \mathrm{d}s\right)
$$

于是

$$
\begin{aligned}
E\left[z_t h_t - \int_0^t z_s H_s \mathrm{d}s\right] &= E\left[z_t(h_t - h_0 - \int_0^t H_s \mathrm{d}s)\right] \\
&= Ez_t Y_t = E < z, Y >_t \\
&= E\int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{\mathrm{d} < Y, W >_s}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\
&= E\int_0^t \lambda_s(\xi) D_s \mathrm{d}s \\
&= E\int_0^t \lambda_s(\xi)\pi_s(D)\mathrm{d}s \qquad (7-43)
\end{aligned}
$$

计算 (7 − 42) 式的第二项,

$$
\begin{aligned}
&E\left[h_t\int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{A_s(\omega)-\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\right]\\
&=E\int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{h_sA_s(\omega)-h_s\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\\
&\quad+E\int_0^t \lambda_s(\xi)(h_t-h_s)\frac{A_s(\omega)-\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\\
&=E\int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{\pi_s(hA)-\pi_s(h)\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\\
&\quad+E\int_0^t \lambda_s(\xi)(h_t-h_s)\frac{A_s(\omega)-\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{7-44}
$$

由于

$$
h_t-h_s=\int_s^t H_u\mathrm{d}u+(Y_t-Y_s)
$$

而 $E(Y_t-Y_s|\mathcal{F}_s)=0$, 因此

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t \lambda_s(\xi)(h_t-h_s)\frac{A_s(\omega)-\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\\
&=E\int_0^t\left[\int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u(\omega)-\pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u\right]H_s\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

这样由 (7 − 44) 式,

$$
\begin{aligned}
&E\left[h_t\int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{A_s(\omega)-\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\right]\\
&=E\int_0^t \lambda_s(\xi)\frac{\pi_s(hA)-\pi_s(h)\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\mathrm{d}s\\
&\quad+E\int_0^t\left[\int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u(\omega)-\pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u\right]H_s\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{7-45}
$$

由 (7 − 42) 式、(7 − 43) 式、(7 − 45) 式并对比 (7 − 40) 式，我们得到

$$g_s(\xi) = \pi_s(D) + \frac{\pi_s(hA) - \pi_s(h)\pi_s(A)}{B_s(\xi)} \tag{7 − 46}$$

由 (7 − 38) 式及 (7 − 46) 式，定理得证. □

7.9 定理是最佳非线性滤波方程，它应该适用于线性滤波的情形. 将 (7 − 25) 式与 (7 − 2) 式比较，则有 $h_t = X_t, H(t,\omega) = a(t)X_t, \mathrm{d}Y_t = b(t)\mathrm{d}U_t, A_t(w) = A(t)X_t, B_t(\xi) = B(t), D_t = 0$. 将它们代入一般的滤波方程，则得到

$$\mathrm{d}\pi_t(X) = a(t)\pi_t(X)\mathrm{d}t + A(t)B(t)^{-1}[\pi_t(X^2) - (\pi_t(X))^2]\mathrm{d}\overline{W}_t \tag{7 − 47}$$

这样，滤波方程遇到了非闭合性的困难. 也就是说为了求 $\pi_t(X) = E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)$，却要知道比它高阶的条件矩阵 $E(X_t^2|\mathcal{F}_t^\xi)$. 特别为了求出滤波的误差

$$\gamma_t = E\left[(X_t - E(X_t|\mathcal{F}_t^\xi)^2)|\mathcal{F}_t^\xi\right]$$

我们从 (7 − 2) 式，由 Ito 公式得到

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t a_s(\omega)\mathrm{d}s + x_t$$

其中

$$a_s(\omega) = 2a(s)X_s^3 + b^2(s), \text{及} x_t = \int_0^t 2b(s)X_s\mathrm{d}U_t$$

由滤波方程 (7 − 30) 式，我们得到

$$\mathrm{d}\pi_t(X^2) = [2a(t)\pi_t(X^2) + b^2(t)]\mathrm{d}t + A(t)B^{-1}(t)[\pi_t(X^3)$$

$$-\pi_t(X)\pi_t(X^2)]\mathrm{d}\overline{W}_t \tag{7-48}$$

也就是为了得到低阶条件矩阵必须知道高阶条件矩．这个困难在 7.2 定理的框架下得到了解决．这是因为在 $(X_t,\xi_t)$ 联合正态的条件下，$\pi_t(X_t^n)=E(X_t^n|\mathcal{F}_t^\xi)$ 可用 $m_t\triangleq\pi_t(X),\pi_t(X^2)$ 来表示．特别地，

$$\begin{aligned}
&\pi_t(X^3)-m_t\pi_t(X^2)\\
&=E[X_t^2(X_t-m_t)|\mathcal{F}_t^\xi]\\
&=E\left\{(X_t-m_t)^3|\mathcal{F}_t^\xi)\right\}+2m_tE\left\{(X_t-m_t)^2|\mathcal{F}_t^\xi\right\}\\
&\quad+m_t^2E\left\{X_t-m_t|\mathcal{F}_t^\xi\right\}\\
&=2\pi_t(X)\gamma_t
\end{aligned} \tag{7-49}$$

其中

$$\gamma_t=E\left[(X_t-m_t^2)|\mathcal{F}_t^\xi\right] \tag{7-50}$$

为滤波的条件误差．于是由 (7 – 51) 式，我们得到

$$\mathrm{d}\pi_t(X^2)=[2a(t)\pi_t(X^2)+b^2(t)]\mathrm{d}t+\frac{2A(t)m_t}{B(t)}\gamma_t\mathrm{d}\overline{W}_t \tag{7-51}$$

因为滤波方程也可写为

$$\mathrm{d}m_t=a(t)m_t\mathrm{d}t+A(t)B^{-1}(t)\gamma_t\mathrm{d}\overline{W}_t$$

由 Ito 公式

$$\mathrm{d}(m_t)^2=2m_t[a(t)m_t\mathrm{d}t+\frac{A(t)}{B(t)}\gamma_t\mathrm{d}\overline{W}_t]+\frac{A^2(t)\gamma_t^2}{B^2(t)}\mathrm{d}t$$

由于 $\gamma_t=\pi_t(X^2)-m_t^2$, 于是可推得 Riccati 方程:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_t}{\mathrm{d}t}=2a(t)\gamma_t-\frac{A^2(t)\gamma_t^2}{B^2(t)}+b^2(t) \qquad (7-52)$$

由正态相关定理可以证明在 7.7 定理的条件下,

$$\gamma_t=S(t)$$

因此, $(7-52)$ 式就是 $(7-19)$ 式. 事实上, 因为 $(X_t,\xi_t)$ 联合正态, 令 $\mathcal{F}_{t,n}^{\xi}=\sigma(\xi_{t_0^n},\cdots,\xi_{t_{2^n}^n})$, 其中 $0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n=t$. 那么 $\mathcal{F}^{x}i_{t,n}\uparrow\mathcal{F}_t^{\xi}$. 由于 $EX_t^2<\infty$, 若记 $m_t^n=E(X_t|\mathcal{F}_{t,n}^{\xi})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}m_t^n=m_t$. 而且由 $m_t^n$ 的一致可积性, $m_t^n\xrightarrow{L^2}m_t$. 由正态相关定理

$$E\left[(X_t-m_t^n)^2|\mathcal{F}_{t,n}^{\xi}\right]=D_{X,X}-D_{X,\xi}D_{\xi,\xi}^{+}D_{X,\xi}^{*}$$

式中 $\xi=(\xi_{t_1^n},\cdots,\xi_{t^{2^n},n})$. 而 $m_t^n=m_X+D_{X,\xi}D_{\xi,\xi}^{+}(\xi-m_\xi)$, 因此可算得,

$$\begin{aligned}
S_t^n &\triangleq E(X_t-m_t^n)^2\\
&=E\left[(X_t-m_X)-D_{X,\xi}D_{\xi,\xi}^{+}(\xi-m_\xi)^2\right]\\
&=D_{X,X}-D_{X,\xi}D_{\xi,\xi}^{+}D_{X,\xi}^{*}\\
&=E\left[(X_t-m_t^n)^2|\mathcal{F}_{t,n}^{\xi}\right]
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} S_t &= E(X_t - m_t)^2 = \lim_{n\to\infty} S_t^n \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[(X_t - m_t^n)^2 | \mathcal{F}_{t,n}^{\xi}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E(X_t^2 | \mathcal{F}_{t,n}^{\xi}) - \lim_{n\to\infty} (m_t^n)^2 \\ &= E(X_t^2 | \mathcal{F}_t^{\xi}) - m_t^2 = \gamma_t \end{aligned}$$

从上述关于闭合方程的讨论中看出，$(X_t, \xi_t)$ 联合正态的假设还可减弱为 $X_t$ 关于 $\mathcal{F}_t^{\xi}$ 条件正态. 我们把这种情形的正式叙述留给 §7.6.

## §7.3 扩散 Markov 过程的滤波

我们把模型进一步推广，假设有二维过程 $(X_t, \xi_t), t \leqslant T$ 满足:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = a(t, X_t, \xi_t)\mathrm{d}t + b_1(t, X_t, \xi_t)\mathrm{d}W_1(t) + \\ \qquad\qquad b_2(t, X_t, \xi_t)\mathrm{d}W_2(t) \\ \mathrm{d}\xi_t = A(t, X_t, \xi_t)\,\mathrm{d}t + B(t, \xi_t)\,\mathrm{d}W_2(t) \\ P(|X_0| < \infty) = P(|\xi_0| < \infty) = 1 \end{cases} \tag{7-53}$$

其中 $W_1, W_2$ 为两个独立的 Wiener 过程. 若简记 $g(t, x, y)$ 为 $a(t, x, y)$, $A(t, x, y), b_i(t, x, y), B(t, y), i = 1, 2$ 之任一个，假设

$$\begin{cases} |g(t, x, y) - g(t, x', y')| \leqslant C(|x - x'|^2 + |y - y'|^2) \\ g^2(t, x, y) \leqslant C(1 + x^2 + y^2) \end{cases} \tag{7-54}$$

从而 (7 − 53) 式有唯一的强解，且具马氏性. 当 $E(X_0^2+\xi_0^2)<\infty$ 时， $\sup_{t\leqslant T}E(X_t^2+\xi_t^2)<\infty$, 于是由 (7 − 54) 式,

$$\sup_{t\leqslant T}E(A^2(t,X_t,\xi_t)+B^2(t,\xi_t))<\infty \tag{7-55}$$

这里 $X_t$ 不可观测，而 $\xi_t$ 为可观测的过程.

设待估函数 $h=h(t,X_t,\xi_t)$, 满足 $E|h(t,X_t,\xi_t)|<\infty$, 往求估计 $\pi_t(h)=E(h(t,X_t,\xi_t)|\mathcal{F}_t^\xi)$ 所满足的滤波方程.

下面我们还假设:

$$B^2(t,x)\geqslant C>0 \tag{7-56}$$

$$h=h(t,x,y)\text{及其一、二阶偏导数连续} \tag{7-57}$$

$$\sup_{t\leqslant T}Eh^2(t,X_t,\xi_t)<\infty \tag{7-58}$$

$$\int_0^T E(\mathcal{L}h(t,X_t,\xi_t))^2\,\mathrm{d}t<\infty \tag{7-59}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h(t,x,y)=&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}a(t,x,y)+\frac{\partial h}{\partial y}A(t,x,y)\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}[b_1^2(t,x,y)+b_2^2(t,x,y)]\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}B^2(t,y)+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}b_2(t,x,y)B(t,y)\end{aligned} \tag{7-60}$$

$$\int_0^T E(h_x'(t,X_t,\xi_t))^2[b_1^2(t,X_t,\xi_t)+b_2^2(t,X_t,\xi_t)]\,\mathrm{d}t<\infty \tag{7-61}$$

$$\int_0^T E(\frac{\partial h}{\partial y}(t,X_t,\xi_t))^2B^2(t,\xi_t)\,\mathrm{d}t<\infty \tag{7-62}$$

**7.11定理** 在上述一系列假设下，

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(\mathcal{L}h)\mathrm{d}s + \int_0^t [\pi_s(\mathcal{N}h) + \frac{\pi_s(Ah) - \pi_s(A)\pi_s(h)}{B(s,\xi_s)}]\mathrm{d}\overline{W}_s \qquad (7-63)$$

其中

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\xi_s - \pi_s(A)\mathrm{d}s}{B(s,\xi_s)}$$

为 $(\mathcal{F}_t^\xi)$Brownian 运动，且

$$\mathcal{N}h = \frac{\partial h}{\partial x}b_2(t,x,y) + \frac{\partial h}{\partial y}B(t,y)$$

**证明** 由 Ito 公式

$$h(t,X_t,\xi_t) = h(0,X_0,\xi_0) + \int_0^t \mathcal{L}h(s,X_s,\xi_s)\mathrm{d}s + x_t$$

而

$$x_t = \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s,\xi_s)b_i(s,X_s,\xi_s)\mathrm{d}W_i(s) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial y}(s,X_s,\xi_s)B(s,\xi_s)\mathrm{d}W_2(s)$$

由上述假设，$(x_t,\mathcal{F}_t), t \leqslant T$ 为平方可积鞅，往证

$$< x, W_2 >_t = \int_0^t \mathcal{N}h(s,X_s,\xi_s)\mathrm{d}s \qquad (7-64)$$

由 Ito 公式

$$x_tW_2(t) = \int_0^t W_2(s)h'_x(s,X_s,\xi_s)b_1(s,X_s,\xi_s)\mathrm{d}W_1(s)$$
$$+\int_0^t [\xi_s + W_2(s)h'_x(s,X_s,\xi_s)b_2(s,X_s,\xi_s)$$
$$+W_2(s)h'_x(s,X_s,\xi_s)B(s,\xi_s)]\mathrm{d}W_2(s)$$
$$+\int_0^t [h'_x(s,X_s,\xi_s)b_2(s,X_s,\xi_s)$$
$$+h'_y(s,X_s,\xi_s)B(s,X_s,\xi_s)]\mathrm{d}s$$

从而

$$Z_t = x_tW_2(t) - \int_0^t [h'_x(s,X_s,\xi_s)b_2(s,X_s,\xi_s)$$
$$+h'_y(s,X_s,\xi_s)B(s,\xi_s)]\mathrm{d}s$$

为 $(\mathcal{F}_t)$ 鞅，于是 (7 − 64) 式得证. 应用一般的滤波方程 (7 − 30)，便得 (7 − 63) 式. □

## §7.4 最佳非线性内插方程

回到 §7.2 的假设:

$$\begin{cases} \text{非线性系统} \\ \mathrm{d}h_t = H(t,\omega)\mathrm{d}t + Y_t \\ \text{观测系统} \\ \mathrm{d}\xi_t = A_t(\omega)\mathrm{d}t + B_t(\xi)\mathrm{d}W_t \end{cases}$$

其中 $(Y_t,\mathcal{F}_t), t\leqslant T$ 为零初值鞅,

$$P\left(\int_0^T |A_t(\omega)|\mathrm{d}t<\infty\right)=1$$

$$P\left(\int_0^T B_t^2(\xi)\,\mathrm{d}t<\infty\right)=1$$

泛函 $B_t(x)\in B_t, A, B$ 满足 Lipschitz 条件与线性增长条件, 保证 $\xi_t$ 作为上述方程的强解而存在. 而 $\int_0^T |H_s|\,\mathrm{d}s<\infty, P\text{-a.s.}$

所谓最佳内插问题是, 依观测结果 $\xi_u, u\leqslant t$, 在均方意义下求得 $h_s, s\leqslant t$ 的最佳估计. 我们仍然假设 $Eh_s^2>\infty$, 于是最佳估计就是

$$\pi_{s,t}(h)=E(h_s|\mathcal{F}_t^\xi)$$

问题在于给出可以用来递推的方程, 这里有两类方程: 当 $s$ 固定时, 关于 $t$ 的正方程, 以及当 $t$ 固定时, 关于 $s$ 的逆方程. 下面是正方程:

**7.12定理** 在 §7.2 假设下, 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, 有

$$\pi_{s,t}(h)=\pi_s(h)$$

$$+\int_s^t \frac{E(h_sA_u|\mathcal{F}_u^\xi)-E(h_s|\mathcal{F}_u^\xi)E(A_u|\mathcal{F}_u^\xi)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}\overline{W}_u \quad (7-65)$$

**证明** 考虑平方可积鞅 $y=(y_t,\mathcal{F}_t^\xi)$,

$$y_t=\pi_{s,t}(h)\triangleq E(h_s|\mathcal{F}_t^\xi), t\geqslant s \qquad (7-66)$$

如同 7.9 定理的证明, $\xi_t$ 可表为扩散

$$\mathrm{d}\xi_t=\pi_t(A)\mathrm{d}t+B_t(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_t$$

因此由 7.20 定理，平方可积鞅 $y_t$ 有表示

$$y_t = \pi_s(h) + \int_s^t g_u^s(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_u,\ E\int_s^t (g_u^s(\xi))^2\mathrm{d}u < \infty$$

往证

$$g_u^s(\xi) = \frac{E(h_s A_u|\mathcal{F}_u^\xi) - \pi_{s,u}(h)\pi_u(A)}{B_u(\xi)} \tag{7-67}$$

考虑鞅 $z_t = \int_s^t \lambda_u^s(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_u$, 其中 $\lambda_u^s(\xi)| \leqslant C < \infty$, 则

$$Ey_t z_t = E\int_s^t \lambda_u^s(\xi) g_u^s(\xi)\mathrm{d}u \tag{7-68}$$

由 6.15 定理的 (6-67) 式，

$$\overline{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
Ey_t z_t &= Eh_s z_t \\
&= Eh_s\int_s^t \lambda_u^s(\xi)\mathrm{d}W_u \\
&\quad + Eh_s\int_0^t \lambda_u^s(\xi)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E[h_s E(\int_s^t \lambda_u^s(\xi)\mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_s)] \\
&\quad + E\int_s^t \lambda_u^s(\xi)\frac{h_s(A_u - \pi_u(A))}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E\int_s^t \lambda_u^s(\xi)\frac{E(h_s A_u|\mathcal{F}_u^\xi) - E(h_s|\mathcal{F}_u^\xi)\pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

比较 (7 − 68) 式，则 (7 − 67) 式得证. □

## §7.5 最佳非线性外推方程

保持 §7.2 的假设, 仍然设待估函数 $h_t$ 满足 $Eh_t^2 < \infty, \forall t \leqslant T$. 外推就是在 $t \geqslant s$ 时, 由观测值 $\xi_u, u \leqslant s$, 求最佳估计

$$\pi_{t,s}(h) \triangleq E(h_t|\mathcal{F}_s^\xi)$$

所满足的方程.

**7.13定理** 在 §7.2 的假设下,

$$\pi_{t,s}(h) = \pi_{t,0}(h) + \int_0^t \left(\pi_u(D) + \frac{E[\pi_{t,u}(h)(A_u - \pi_u(A))|\mathcal{F}_u^\xi]}{B_u(\xi)}\right) \mathrm{d}\overline{W}_u \qquad (7-69)$$

其中 $D_s = \dfrac{\mathrm{d} < \widetilde{x}, W >_s}{\mathrm{d}s}$, 而 $\widetilde{x}_s = E(h_t|\mathcal{F}_s)$ 为平方可积鞅.

**证明** 固定 $t \geqslant s, y_s = E(h_t|\mathcal{F}_s^\xi)$ 为平方可积鞅, 由鞅表示定理

$$y_s = E(h_t|\mathcal{F}_0^\xi) + \int_0^s g_u^t(\xi)\,\mathrm{d}\overline{W}_u \qquad (7-70)$$

$$E\int_0^T (g_u^t(\xi))^2\,\mathrm{d}u < \infty$$

令 $z_s = \int_0^s \lambda_u(\xi)\mathrm{d}\overline{W}_u, |\lambda_u(\xi)| \leqslant C < \infty$, 于是

$$Ey_s z_s = E\int_0^s \lambda_u(\xi) g_u^t(\xi)\mathrm{d}u \qquad (7-71)$$

而用另一种方法计算

$$\begin{aligned} Ey_s z_s &= E(E(h_t|\mathcal{F}_s^\xi)z_s) \\ &= E(h_t z_s) = E\left[E(h_t|\mathcal{F}_s)z_s\right] \\ &= E\widetilde{x}_s z_s \end{aligned} \qquad (7-72)$$

记 $\widetilde{z}_s = \int_0^s \lambda_u(\xi)\mathrm{d}W_u$; 它也是平方可积鞅. 由于

$$\overline{W}_s = W_s + \int_0^s \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u$$

则

$$z_s = \widetilde{z}_s + \int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u$$

由 (7 − 72) 式则

$$\begin{aligned}
Ey_s z_s &= E\widetilde{x}_s\widetilde{z}_s + E\widetilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E < \widetilde{x}, \widetilde{z} >_s + E\widetilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E\int_0^s \lambda_u(\xi)D_u\mathrm{d}u + E\widetilde{x}_s \int_0^s \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E\int_0^s \lambda_u(\xi)\pi_u(D)\mathrm{d}u + E\widetilde{x}_s \int_0^s \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \qquad (7-73)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&E\widetilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E\int_0^s \lambda_u(\xi)E(\widetilde{x}_s|\mathcal{F}_u)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \qquad (7-74)
\end{aligned}$$

注意到 $E(\widetilde{x}_s|\mathcal{F}_u) = E(h_t|\mathcal{F}_u)$, 因此由 (7-74) 式,

$$\begin{aligned}
&E\widetilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u \\
&= E\int_0^s \lambda_u(\xi)\frac{E\left(E(h_t|\mathcal{F}_u)(A_u - \pi_u(A))|\mathcal{F}_u^\xi\right)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

这样，由 (7 − 72) 式得到

$$Ey_sz_s = E\int_0^s \lambda_u(\xi)\left(\pi_u(D) + \frac{E[\pi_{t,u}(h)(A_u - \pi_u(A))|\mathcal{F}_u^\xi]}{B_u(\xi)}\right)\mathrm{d}u$$

将它与 (7 − 71) 式比较，我们得到

$$g_u(\xi) = \pi_u(D) + \frac{E[\pi_{t,u}(h)(A_u - \pi_u(A))|\mathcal{F}_u^\xi]}{B_u(\xi)} \qquad (7-75)$$

从而由 (7 − 70) 式，得证. □

## §7.6 条件 Gauss 情形下的滤波

在 §7.2 为了得到滤波的闭合方程，我们假定了 $(X_t, \xi_t)$ 为联合正态，而且还指出其实联合正态可以被所谓的条件正态所代替.

现在假设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 为完备的概率空间，$W_1(t), W_2(t)$ 为两个独立的 Wiener 过程.

$(X_t, \xi_t), 0 \leqslant t \leqslant T$ 为两个扩散过程，满足

$$\mathrm{d}X_t = [a_0(t,\xi) + a_1(t,\xi)X_t]\mathrm{d}t + b_1(t,\xi)\mathrm{d}W_1(t) + b_2(t,\xi)\mathrm{d}W_2(t) \qquad (7-76)$$

$$\mathrm{d}\xi_t = [A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)X_t]\mathrm{d}t + B(t,\xi)\mathrm{d}W_2(t) \qquad (7-77)$$

假设初始值 $X_0, \xi_0$ 与 $W_1(t), W_2(t)$ 独立，在 $[0,T]$ 上，可测泛函 $a_i(t,x), A_i(t,x)$a.s. 绝对可积， $b_i(t,x), B(t,x)$a.s. 平方可积，

$$\inf_{x\in C_T} B^2(t,x) \geqslant C > 0, 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (7-78)$$

并且 $B(t,x)$ 满足 Lipschitz 及线性增长条件.

$$\int_0^T E|A_1(t,\xi)X_t|\mathrm{d}t < \infty \qquad (7-79)$$

$$E|X_t| < \infty, t \leqslant T \tag{7-80}$$

$$P\{\int_0^T A_1^2(t,\xi)\pi_t^2(X)\mathrm{d}t < \infty\} = 1 \tag{7-81}$$

我们总称以上条件为 §7.6 条件.

**7.14引理** 在 §7.6 条件下, 若 $P(X_0 \leqslant a|\xi_0)$ 为 $\mathcal{N}(m_0, \gamma_0)$, 其中 $\gamma_0 < \infty$, 则

$$P(X_{t_0} \leqslant x_0, X_{t_1} \leqslant x_1, \cdots, X_{t_n} \leqslant x_n | \mathcal{F}_t^{\xi})$$

为正态分布. 此时我们称 $(X_t, \xi_t)$ 为条件 Gauss 过程.

文献 [2]ch.11 给出了证明, 这个引理的证明相当复杂, 这里省去. 我们的主要结果是

**7.15定理** 在 §7.6 条件下, 如果还假设

$$\begin{cases} |a_1(t,x)| \leqslant L, |A_1(t,x)| \leqslant L \\ \int_0^T E[a_0^4(t,\xi) + b_1^4(t,\xi) + b_2^4(t,\xi)]\mathrm{d}t < \infty \\ E|X_0|^4 < \infty \end{cases} \tag{7-82}$$

并且 $P(X_0 \leqslant a|\xi_0)$ 为 $\mathcal{N}(m_0, \gamma_0), \gamma_0 < \infty$, 记 $m_t = \pi_t(X)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m_t &= [a_0(t,\xi) + a_1(t,\xi)m_t]\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi) + \gamma_t A_1(t,\xi)}{B^2(t,\xi)} \\ &\quad \times [\mathrm{d}\xi_t - (A_0(t,\xi) + A_1(t,\xi)m_t)\mathrm{d}t] \end{aligned} \tag{7-83}$$

其中 $\gamma_t = E(X_t^2|\mathcal{F}_t^{\xi}) - m_t^2$, 而

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\gamma_t}{\mathrm{d}t} &= 2a_1(t,\xi)\gamma_t + b_1^2(t,\xi) + b_2^2(t,\xi) \\ &\quad - \left(\frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi) + \gamma_t A_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}\right)^2 \end{aligned} \tag{7-84}$$

**证明** 将一般滤波方程 (7 − 30) 应用于此，即令

$$h_t \triangleq X_t = X_0 + \int_0^t H(s)\mathrm{d}s + x_t \qquad (7-85)$$

其中

$$H(t) = a_0(t,\xi) + a_1(t,\xi)h_t$$
$$\mathrm{d}x_t = b_1(t,\xi)\mathrm{d}W_1(t) + b_2(t,\xi)\mathrm{d}W_2(t)$$

注意到 $W_1, W_2$ 相互独立，有

$$D_t = \frac{\mathrm{d} < x, W_2 >_t}{\mathrm{d}t} = b_2(t,\xi)B(t,\xi)$$

而 (7 − 30) 式的 $A(t,\xi) = A(t,\xi) + A_1(t,\xi)X_t$，于是有 (7 − 83) 式. 往证 (7 − 84) 式. 记 $\delta_t = E(X_t^2|\mathcal{F}_t^\xi)$，则

$$\gamma_t = \delta_t - m_t^2$$

由 (7 − 76) 式及 Ito 公式，我们有

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_s[a_0(s,\xi)$$

$$+a_1(s,\xi)X_s] + [b_1^2(s,\xi) + b_2^2(s,\xi)]\mathrm{d}s + \widetilde{x}_t \qquad (7-86)$$

其中 $\widetilde{x}_t = \int_0^t 2X_s[b_1(s,\xi)\mathrm{d}W_1(s) + b_2(s,\xi)\mathrm{d}W_2(s)]$. 将 (7 − 86) 式写成为

$$\widetilde{h}_t = \widetilde{h}_0 + \int_0^t \widetilde{H}_s\mathrm{d}s + \widetilde{x}_t \qquad (7-87)$$

其中 $\widetilde{h}_t = h_t^2, \widetilde{H}_t = 2h_t[a_0(t,\xi) + a_1(t,\xi)h_t] + [b_1^2(t,\xi) + b_2^2(t,\xi)]$ 相应的 $\widetilde{D}_t = \dfrac{\mathrm{d} < \widetilde{x}, W_2 >_t}{\mathrm{d}t} = 2\mathcal{H}_t b_2(t,\xi)$. 文献 [2] 之 12.1 引理，表明 (7 − 82) 式可保证

$$E\left(\sup_{t\leqslant T} h_t^4\right) < \infty$$

从而使得 $x_t, \widetilde{x}_t$ 都是平方可积鞅. 应用一般滤波方程于 $\widetilde{h}_t$, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\delta_t = &\left(2a_0(t,\xi)m_t + 2a_1(t,\xi)\delta_t + [b_1^2(t,\xi) + b_2^2(t,\xi)]\right)\mathrm{d}t \\ &+\frac{1}{B(t,\xi)}\left(2m_t b_2(t,\xi)B(t,\xi) + A_1[E(h_t^3|\mathcal{F}_t^\xi) - \delta_t m_t]\right)\mathrm{d}\overline{W}_t\end{aligned}$$

而由 (7 − 82) 式及 Ito 公式得到

$$\begin{aligned}m_t^2 = m_0^2 + &\int_0^t (2m_s[a_0(s,\xi) + a_1(s,\xi)m_s]) \\ &+\left[\frac{b_2(s,\xi)B(s,\xi) + \gamma_s A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\right]^2 \mathrm{d}s \\ &+\int_0^t 2m_s \frac{b_2(s,\xi)B(s,\xi) + \gamma_s A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\mathrm{d}\overline{W}_s \qquad (7-88)\end{aligned}$$

从而由 $\gamma_t = \delta_t - m_t^2$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma_t = &\,2a_1(t,\xi)\gamma_t + b_1^2(t,\xi) + b_2^2(t,\xi) \\ &-\left(\frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi) + \gamma_t A_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}\right)^2 \\ &+\frac{A_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}[E(h_t^3|\mathcal{F}_3^\xi) - \delta_s m_s - 2m_s\gamma_s]\,\mathrm{d}\overline{W}_t \qquad (7-89)\end{aligned}$$

再由条件 Gauss 性,

$$E(h_t^3|\mathcal{F}_s^\xi) = 3m_s\delta_s - 2m_s^3 = \delta_s m_s + 2m_s\gamma_s$$

于是 (7 − 89) 式中含有 $\mathrm{d}\overline{W}_t$ 的项为 0,(7 − 84) 式得证. □

## §7.7 可列状态马氏过程的滤波

考虑随机过程 $(X_t,\xi_t), t\leqslant T$, 其中不可观测过程 $X_t$ 是状态可列的马氏过程, 记其状态空间 $E=\{1,2,\cdots\}$. 而可观测过程 $\xi_t$ 满足

$$\mathrm{d}\xi_t = A_t(X_t,\xi)\mathrm{d}t + B_t(\xi)\mathrm{d}W_t \tag{7-90}$$

过程统计的许多问题均可归结为这个模型.

假定 (7 − 90) 式中的 $A_t, B_t$ 满足通常的 Lipschitz 与线性增长条件. 而且

$$E\xi_0^2<\infty$$

$$E\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t<\infty$$

以上条件 (称为 § 7.7 条件) 保证了 (7 − 90) 式强解 $(\xi_t,\mathcal{F}_t^{\xi_0,X,W})$ 的存在, 而且

$$\sup\nolimits_{t\leqslant T}E\xi_t^2<\infty$$

关于 $(X_t)$ 的滤波问题就是求得

$$\pi_i(t)\triangleq P(X_t=i|\mathcal{F}_t^{\xi}),\ i\in E$$

的滤波方程. 由它不难得到

$$\pi_t(X)\triangleq E(X_t|\mathcal{F}_t^{\xi})=\sum_{i\in E}i\pi_i(t)$$

记

$$p_{ij}(s,t)=P(X_t=j|X_s=i)$$

为非齐次马氏过程的转移概率. 根据马氏过程理论, 我们一般假设 $p_{ij}(s,t)$ 为二元 Lebesgue 可测, 并且

$$\lim_{s\uparrow t} p_{ij}(s,t) = \delta_{ij} \tag{7-91}$$

其中 $\delta_{ij}$ 为 Kronecker 符号. (7−91) 式的意义极其明了, 此时我们称 $p_{ij}(s,t)$ 为标准的. 可以证明 (文献 [9]pp432,433) 极限

$$\lambda_{ij}(t) \triangleq \lim_{\delta\to 0} \frac{p_{ij}(t,t+\delta)-\delta_{ij}}{\delta}$$

存在, 而且当 $i\neq j$ 时, 上述极限有限. $\lambda_{ij}(t)$ 就是过程在时刻 $t$ 由 $i$ 到 $j$ 的转移密度. 转移概率 $p_{ij}(s,t)$ 满足 Kolmogorov 前向方程:

$$p_{ij}(s,t) = \delta_{ij} + \int_s^t \mathcal{L}p_{ij}(s,u)\mathrm{d}u \tag{7-92}$$

其中

$$\mathcal{L}p_{ij}(s,u) = \sum_{k\in E} \lambda_{kj}(u)p_{ik}(s,u) \tag{7-93}$$

而 $p_j(t) = P(X_t = j)$ 满足

$$p_j(t) = p_j(0) + \int_0^t \mathcal{L}p_j(u)\mathrm{d}u \tag{7-94}$$

其中

$$\mathcal{L}p_j(u) = \sum_{k\in E} \lambda_{kj}(u)p_j(u)$$

它们的证明可参考文献 [9], 也可参考文献 [2] 引理 9.1.

**7.16引理** 假设 (7-91) 式成立，而且 $|\lambda_{ij}(t)| \leqslant K < \infty$. 令

$$x_t^j = \delta_{X_t,j} - \delta_{X_0,j} - \int_0^t \lambda_{X_s j}(s)\mathrm{d}s \qquad (7-95)$$

则 $(x_t^j, \mathcal{F}_t), t \leqslant T$ 为右连续平方可积鞅.

**证明** 因为 $|x_t^j| \leqslant 2 + KT$, 故过程 $x_t^j$ 有界，且从 $X_t$ 的右连续，可见 $x_t^j$ 右连续.

设 $t > s$, 于是

$$x_t^j = x_s^j + \left[\delta_{X_t j} - \delta_{X_s j} - \int_s^t \lambda_{X_u j}(u)\mathrm{d}u\right]$$

所以

$$E(x_t^j|\mathcal{F}_s) = x_s^j + E\left[\delta_{X_t j} - \delta_{X_s j} - \int_s^t \lambda_{X_u j}(u)\mathrm{d}u|\mathcal{F}_s\right]$$

由 $X_t$ 的马氏性以及 (7-92) 式,

$$\begin{aligned}
&E\left[\delta_{X_t j} - \delta_{X_s j} - \int_s^t \lambda_{X_u j}(u)\mathrm{d}u|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\delta_{X_t j} - \delta_{X_s j} - \int_s^t \lambda_{X_u j}(u)\mathrm{d}u|X_s\right] \\
&= p_{X_s j}(s,t) - \delta_{X_s j} - \int_s^t \sum_{k\in E} \lambda_{kj} p_{X_s k}(s,u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

**7.17定理** 在 §7.7 条件下，又 (7-91) 式成立，而且 $|\lambda_{ij}(t)| \leqslant$

$K < \infty$, 则验后概率 $\pi_j(t), j \in E$ 满足

$$\pi_j(t) = p_j(0) + \int_0^t \mathcal{L}\pi_j(u)\mathrm{d}u + \int_0^t \pi_j(u)\frac{A_u(j,\xi) - \overline{A}_u(\xi)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}\overline{W}_u \tag{7-96}$$

其中

$$\mathcal{L}\pi_j(u) = \sum_{k\in E} \lambda_{kj}(u)\pi_j(u) \tag{7-97}$$

$$\overline{A}_u(\xi) = \sum_{k\in E} A_u(k,\xi)\pi_k(u) \tag{7-98}$$

而 $(\overline{W}_t, \mathcal{F}_t)$ 为 Wiener 过程,

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\xi_u - \overline{A}_u(\xi)\mathrm{d}u}{B_u(\xi)} \tag{7-99}$$

**证明** 由 7.16 引理

$$\delta_{X_t j} = \delta_{X_0 j} + \int_0^t \lambda_{X_u j}(u)\mathrm{d}u + x_t^j \tag{7-100}$$

其中 $(x_t^j, \mathcal{F}_t)$ 为平方可积鞅, 因为 $x^j$ 与 $W$ 独立, 故 $< x^j, W >_t \equiv 0, t \leqslant T$. 将一般滤波方程应用于 $h_t = \delta_{X_t j}$, 则

$$\pi_t^j(\delta) = \pi_0^j(\delta) + \int_0^t \pi_s^j(\lambda)\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\pi_s^j(\delta A) - \pi_s^j(\delta)\pi_s^j(A)}{B_u(\xi)}\mathrm{d}\overline{W}_u \tag{7-101}$$

其中

$$\pi_t^j(\delta) = E(\delta_{X_t j}|\mathcal{F}_t^\xi) = \pi_j(t)$$

$$\pi_s^j(\lambda) = E(\lambda_{X_s j}(s)|\mathcal{F}_s^\xi) = \sum_{k\in E}\lambda_{kj}(s)\pi_k(s) = \mathcal{L}\pi_j(s)$$

$$\pi_s^j(\delta A) = E[\delta_{X_s j}A_s(X_s,\xi)|\mathcal{F}_s^\xi] = A_s(j,\xi)\pi_j(s)$$

$$\pi_s^j(A) = E[A_s(X_s,\xi)|\mathcal{F}_s^\xi] = \overline{A}_s(\xi) = \sum_{k\in E}A_s(j,\xi)\pi_j(s)$$

将这些表达式代入 (7 − 101) 式便得 (7 − 96) 式. □

**注**: 如果 (7 − 93) 式中的 $A_t(X_t,\xi)$ 不依赖于 $X_t$, 则 $\pi_j(t) = p_j(t)$.(7 − 96) 式便是 Kolmogorov 前向方程 (7 − 94).

将 (7 − 99) 式关于 $\overline{W}_t$ 的表达代入滤波方程 (7 − 96), 我们将得到可数维的过程系 $\Pi = \{\pi_j(t) : j \in E\}$ 满足一个无限维随机微分方程的系统:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}z_j(t,\xi)\\
&= \Big[\sum_{k\in E}\lambda_{kj}(t)z_k(t,\xi) - z_j(t,\xi)\\
&\quad\times\frac{A_t(j,\xi) - \sum_{k\in E}A_t(k,\xi)z_k(t,\xi)}{B_t^2(\xi)}\\
&\quad\times\sum_{k\in E}A_t(k,\xi)z_k(t,\xi)\Big]\mathrm{d}t\\
&\quad+z_j(t,\xi)\frac{A_t(j,\xi) - \sum_{k\in E}A_t(k,\xi)z_k(t,\xi)}{B_t^2(\xi)}\mathrm{d}\xi_t,\ j\in E \qquad (7-102)
\end{aligned}$$

于是滤波问题的解决依赖于 (7 − 102) 式的解的唯一性. 文献 [2] 之定理 9.2 指出, 在解过程满足一定条件下, (7 − 102) 式的解唯一, 从而可以在实际应用中计算它.

现在讨论最佳非线性内插问题.

对于内插问题，主要的是要求得验后概率

$$\pi_j(s,t) \triangleq P(X_s = j|\mathcal{F}_t^\xi), s \leqslant t$$

所满足的方程.

**7.18定理** 在 §7.7 的条件下，条件概率 $\pi_j(s,t)$ 满足正方程 ($s$ 固定):

$$\mathrm{d}_t\pi_j(s,t) = \pi_j(s,t)B_t^{-2}(\xi)\sum_{i\in E}A_t(i,\xi)[\omega_{ij}(t,s) - \pi_j(t)]$$

$$\left[\mathrm{d}\xi_t - \sum_{i\in E}A_t(i,\xi)\pi_i(t)\mathrm{d}t\right] \qquad (7-103)$$

其中 $\omega_{ij}(s,t) \triangleq P(X_t = i|\mathcal{F}_s^\xi, X_s = j)$. 满足

下面给出的例子可以帮助我们的理解.

**例 1** 设 $\theta$ 为分别以概率 $p, 1-p$ 取值 $j, i$ 的随机变量，而可观测的过程

$$\mathrm{d}\xi_t = \theta\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0$$

由滤波方程 (7-96) 式，验后概率 $\pi(t) = P(\theta = j|\mathcal{F}_t^\xi)$ 满足

$$\mathrm{d}\pi(t) = (j-i)\pi(t)(1-\pi(t))[\mathrm{d}\xi_t - (i + \pi(t)(j-i)\mathrm{d}t)], \pi(0) = p$$

特别 $j = 1, i = 0$ 时,

$$\mathrm{d}\pi(t) = \pi(t)(1-\pi(t))[\mathrm{d}\xi_t - \pi(t)\mathrm{d}t], \pi(0) = p \qquad (7-104)$$

令 $\phi(t) = \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mu_0}(t,\xi)$, 其中 $\mu_i$ 表示相应于 $\theta = i$ 时的 $\mu_\xi, i = 0, 1$. 那么由 6.8 定理之 (6 − 38) 式,

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\xi_t - \frac{t}{2}}$$

因而

$$d\phi(t) = \phi(t)d\xi_t \tag{7-105}$$

由 Bayes 公式，我们可证明：当 $p<1$ 时，

$$\pi(t) = \frac{\frac{p}{1-p}\phi(t)}{1+\frac{p}{1-p}\phi(t)} \tag{7-106}$$

事实上，$\xi_\theta^t \triangleq (\xi_s^\theta, s \leqslant t)$ 是由 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到 $(C^t, \mathcal{B}_t, \mu_\theta)$ 的可测映射，其中 $C^t = C([0,t])$，而 $\mu_\theta(B) = P(\xi_\theta^t \in B), B \in \mathcal{B}_t$. 记

$$\pi(t,x) = P(\theta = 1 | \xi_\theta^t = x^t)$$

这里 $x^t = \{x \in C([0,t]) : \forall s \leqslant t, x_s \equiv x\}$ 由于 $\{\omega : \xi_\theta^t = x^t\}$ 为原子，

$$\begin{aligned} P(\theta = 1, \{\omega : \xi_\theta^t = x^t\}) &= \int_{\{\omega:\xi^t = x^t\}} \pi(t)dP \\ &= \pi(t)P(\omega : \xi^t = x^t) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \frac{P(\theta=1, \xi_1^t = x^t)}{P(\xi_1^t = x^t) + (1-p)P(\xi_0^t = x^t)} \\ &= \frac{p\mu_1(\{x\})}{p\mu_1(\{x\}) + (1-p)\mu_0(\{x\})} \\ &= \frac{p\phi(t)}{p\phi(t) + (1-p)} \end{aligned}$$

(7 − 106) 式得证.

特别指出，验后概率 $\pi(t)$(或 $\phi(t)$) 为在检验简单假设：$H_0 : \theta = 0, H_1 : \theta = 0$ 问题中的充分统计量.

**例 2** 考虑某系统的电子元件的工作寿命 $\theta$, 假定它服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，即

$$P(\theta \leqslant t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

令 $\theta_t = I_{(\theta \leqslant t)}$, 则 $\theta_t$ 是只取 0,1 两个值的齐次马氏过程， $\theta_t = 0$, 表示正常； $\theta_t = 1$, 表示失效. 转移概率

$$p_{ij}(s,t) = P(\theta_t = j | \theta_s = i)$$

转移概率密度

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} [p_{ij}(t, t+\delta) - \delta_{ij}]$$

于是可算得

$$\lambda_{00} = -\lambda, \lambda_{01} = \lambda, \lambda_{10} = \lambda_{11} = 0$$

如果 $P(\theta_0 = 1) = p, P(\theta_0 = 0) = 1 - p$. 设可观测的随机过程

$$\xi_t = \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s + W_t, \xi_0 = 0$$

则验后概率

$$\pi(t) = P(\theta_t = 1 | \mathcal{F}_t^\xi) = P(\theta \leqslant t | \mathcal{F}_t^\xi)$$

为 $\theta_t$ 依观测 $\xi^t = \{\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$ 的最小均方误差估计. 根据 7.19 定理，它满足

$$\mathrm{d}\pi(t) = \lambda \pi(t) \mathrm{d}t + \pi(t)(1 - \pi(t))(\mathrm{d}\xi_t - \pi(t)\mathrm{d}t), \pi(0) = p$$

这是因为 $\mathcal{L}\pi(t) = \lambda\pi(t), A_t(\theta_t, \xi) = \theta_t, A_t(1,\xi) = 1, A_t(0,\xi) = 0$, 并且 $\overline{A}_t(\xi) = \pi(t), B_t(\xi) \equiv 1$.

关于可列状态下马氏过程的内插与外推可参考文献 [2]§9.2, §9.3.

## §7.8 扩散型过程偏差系数的估计

在数理金融学中，我们假定股票价格 $S_t$ 服从经济 Brownian 运动，也即

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t)$$

其中 $\mu$ 是期望收益率，$\sigma$ 称为波动率. 虽然期权定价不依赖 $\mu$ 的值，但是对于市场的观测，估计 $\mu$ 与 $\sigma$ 是必要的.

设 $\theta$ 为未知参数，而扩散过程

$$\mathrm{d}\xi_t = \theta a_t(\xi)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0 \qquad (7-107)$$

其中 $(W_t)$ 为 Brownian 运动，$a_t(x), 0 \leqslant t \leqslant T, x \in C[0,T]$ 为可测的适应泛函，研究包含在偏差系数中的参数 $\theta$ 依观测 $\xi_0^T = \{\xi_t, t \leqslant T\}$ 的估计.

假定泛函 $a_t(x)$ 满足

$$P_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\mathrm{d}t < \infty\right) = P_\theta\left(\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \quad (7-108)$$

为了强调 $\xi$ 对 $\theta$ 的依赖，记 $\xi$ 为 $\xi^\theta$. 由 6.8 定理，在 $(C_T, \mathcal{B}_T)$ 上的测度 $\forall B \in \mathcal{B}_T, \mu_\xi^\theta(B) \triangleq P(\xi^\theta \in B)$ 与 $\mu_W(\cdot)$ 等价，且

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\xi}{\mathrm{d}\mu_W}(\xi) = \exp\left\{\theta\int_0^T a_t(\xi)\mathrm{d}\xi_t - \frac{1}{2}\theta^2\int_0^T a_t^2(\xi)\mathrm{d}s\right\} \qquad (7-109)$$

于是系数 $\theta$ 的极大似然估计 $\widehat{\theta}_T(\xi)$ 由下式给定：

$$\widehat{\theta}_T(\xi) = \frac{\displaystyle\int_0^T a_t(\xi)\,\mathrm{d}\xi_t}{\displaystyle\int_0^T a_t^2(\xi)\,\mathrm{d}t} \qquad (7-110)$$

下面讨论这个极大似然估计的性质.

**7.19定理** 假设 $\forall -\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, 有

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \int_0^T E a_t^{16}(\xi^\theta) \mathrm{d}t < \infty \tag{7-111}$$

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} E \left( \int_0^T a_t^2(\xi^\theta) \mathrm{d}t \right)^{-16} < \infty \tag{7-112}$$

则估计的偏差 $b_T(\theta) \triangleq E(\widehat{\theta}_T(\xi^\theta) - \theta)$ 和均方误差 $B_T(\theta) \triangleq E(\widehat{\theta}_T(\xi^\theta) - \theta)^2$ 满足:

$$b_T(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} E \left( \int_0^T a_t^2(\xi^\theta) \mathrm{d}t \right)^{-1} \tag{7-113}$$

$$B_T(\theta) = E \left( \int_0^T a_t^2(\xi^\theta) \mathrm{d}t \right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} E \left( \int_0^T a_t^2(\xi^\theta) \mathrm{d}t \right)^{-2} \tag{7-114}$$

我们需要下面的引理:

**7.20引理** 设对任意的 $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty, B_T$ 可测函数 $\delta(x)$ 满足 $\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} E(\delta(\xi^\theta)) < \infty$. 如果

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} E \int_0^T a_t^8(\xi^\theta) \mathrm{d}t < \infty \tag{7-115}$$

则 $E\delta(\xi^\theta)$ 对 $\theta$ 可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} E\delta(\xi^\theta) = E \left\{ \delta(\xi^\theta) \int_0^T a_t(\xi^\theta) \mathrm{d}W_s \right\} \tag{7-116}$$

**证明** 函数

$$\phi(\theta,W) \triangleq \frac{\mathrm{d}\mu_\xi^\theta}{\mathrm{d}\mu_W} = \exp\left\{\theta\int_0^T a_t(W)\mathrm{d}W_t - \frac{\theta^2}{2}\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t\right\}$$

对 $\theta$ 可微，且

$$\frac{\partial\phi(\theta,W)}{\partial\theta} = \left\{\int_0^T a_t(W)\,\mathrm{d}W_t - \theta\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t\right\}\phi(\theta,W)$$

于是由 Radon-Nikodym 定理

$$\begin{aligned} & E\delta(\xi^{\theta_2}) - E\delta(\xi^{\theta_1}) \\ = & E\delta(W)\left[\phi(\theta_2,W) - \phi(\theta_1,W)\right] \\ = & E\delta(W)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_0^T a_t(W)\mathrm{d}W_t - \theta\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t\right]\phi(\theta,W)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

根据引理的假定

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_2} E\left|\delta(W)\left[\int_0^T a_t(W)\mathrm{d}W_t - \theta\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t\right]\right|\mathrm{d}\theta \\ = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} E\left|\delta(\xi^\theta)\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right|\mathrm{d}\theta \\ \leqslant & \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[E\delta^2(\xi^\theta)E\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta < \infty \end{aligned} \qquad (7-117)$$

因此，由 Fubini 定理

$$E\delta(W)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_0^T a_t(W)\,\mathrm{d}W_t-\theta\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t\right]\phi(\theta,W)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}E\delta(\xi^\theta)\left[\int_0^T a_t(W)\,\mathrm{d}W_t-\theta\int_0^T a_t^2(W)\mathrm{d}t\right]\phi(\theta,W)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}E\left\{\delta(\xi^\theta)\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right\}\mathrm{d}\theta$$

那么

$$E\delta(\xi^{\theta_2})-E\delta(\xi^{\theta_1})=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left\{E\delta(\xi^\theta)\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right\}\mathrm{d}\theta \quad (7-118)$$

这表明 $E\delta(\xi^\theta)$ 关于 $\theta$ 绝对连续.

往证 (7-118) 式中的

$$E\delta(\xi^\theta)\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t$$

$$=E\delta(\xi^\theta)\left\{\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}\xi_t^\theta-\theta\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t\right\}$$

对 $\theta$ 连续. 记

$$\delta_1(\xi^\theta)=\delta(\xi^\theta)\int_0^T a_t(\xi^\theta)\,\mathrm{d}\xi_t^\theta$$

$$\delta_2(\xi^\theta)=\delta(\xi^\theta)\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\,\mathrm{d}t$$

于是

$$E\delta(\xi^\theta)\left[\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right] = E\delta_1(\xi^\theta) - \theta E\delta_2(\xi^\theta) \qquad (7-119)$$

正如前面对 $E\delta(\xi^\theta)$ 的证明，我们只要证明

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} E\delta_i(\xi^\theta) < \infty, i=1,2 \qquad (7-120)$$

便知 $E\delta_i(\xi^\theta)$ 绝对连续，从而连续. 利用引理的条件以及由 Ito 公式导出的不等式:

$$E\left(\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right)^4 \leqslant 36T\int_0^T Ea_t^4(\xi^\theta)\mathrm{d}t$$

可以证明 (7 − 119) 式，于是 $E\delta_i(\xi^\theta)$ 连续，这样由 (7 − 118) 式、(7 − 116) 式便得证. □

**7.21引理** 设 $\delta(x)$ 为 $\mathcal{B}_T$ 可测，且对任意的 $\theta_1<\theta_2$，

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} E\delta^8(\xi^\theta) < \infty \qquad (7-121)$$

若

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} E\int_0^T a_t^{16}(\xi^\theta)\mathrm{d}t < \infty \qquad (7-122)$$

则函数 $E\delta(\xi^\theta)$ 对 $\theta$ 二次可微，且

$$\frac{\mathrm{d}^2 E\delta(\xi^\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = E\delta(\xi^\theta)\left[\left(\int_0^T a_t(\xi^\theta)\,\mathrm{d}W_t\right)^2 - \int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\,\mathrm{d}t\right] \qquad (7-123)$$

**证明** 由 (7-118) 式及 (7-119) 式,

$$\frac{d}{d\theta}E\delta_1(\xi^\theta) - \theta E\delta_2(\xi^\theta)$$

如同 7.20 引理的证明，我们只要证明

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} E\delta^4(\xi) < \infty$$

而这可由引理的条件，运用 Holdër 不等式导出，留给读者. □

**定理7.19的证明** 由 (7-110) 式及 (7-107) 式,

$$\widehat{\theta}_T(\xi) = \theta + \frac{\displaystyle\int_0^T a_t(\xi)\mathrm{d}W_t}{\displaystyle\int_0^T a_t^2(\xi)\mathrm{d}t} \tag{7-124}$$

因此偏差

$$b_T(\theta) = E\left[\widehat{\theta}_T(\xi^\theta) - \theta\right] = E\frac{\displaystyle\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t}{\displaystyle\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t}$$

而由 (7-119) 式则得

$$E\frac{\displaystyle\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t}{\displaystyle\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}\theta}E\left(\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t\right)^{-1}$$

(7 − 113) 式得证.

其次，由 (7-124) 式

$$B_T(\theta) = E\left[\widehat{\theta}_T(\xi^\theta) - \theta\right]^2$$

$$= E\left[\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right]^2\left[\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t\right]^{-2}$$

而由 7.21 引理

$$\frac{\mathrm{d}^2 E\left[\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t\right]^{-2}}{\mathrm{d}\theta^2}$$

$$= E\left[\int_0^T a_t^2(\xi^\theta)\mathrm{d}t\right]^{-2}\left\{\left(\int_0^T a_t(\xi^\theta)\mathrm{d}W_t\right)^2 - \int_0^T a_t^2(\xi)\,\mathrm{d}t\right\}$$

$$= B_T(\theta) - E\left[\int_0^T a_t^2(\xi)\mathrm{d}t\right]^{-1}$$

这就是 (7-114) 式. □

特别当 7.19 定理中的 $a_t(\xi) = \xi_t$ 时，满足

$$\mathrm{d}\xi_t = \theta\xi_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \xi_0 = 0$$

的过程 $(\xi_t)$ 称为是 Gauss 马氏过程，此时

$$\widehat{\theta}_T(\xi) = \frac{\int_0^T \xi_t\mathrm{d}\xi_t}{\int_0^T \xi_t^2\mathrm{d}t} = \frac{\xi_T^2 - T}{2\int_0^T \xi_t^2\mathrm{d}t} \qquad (7-125)$$

文献 [2] 的 §13.4 证明了上述极大似然估计 $\widehat{\theta}_T(\xi)$ 是强相合的估计，即

$$P(\lim_{T\to\infty}\widehat{\theta}_T(\xi^\theta) = \theta) = 1$$

文献 [3] 之 §13.5 还给出了二维 Gauss 马氏过程的参数估计.

在结束本书之前，我们要指出由于篇幅的限制，本书不可能将丰富的随机分析内容包罗殆尽. 对于鞅论与随机积分，特别对于非连续 (带跳) 半鞅的更深刻的内容可见文献 [1]，对于 Malliavin Calcus 可见文献 [4]，对于在过程统计上的应用可见文献 [2]，对于随机分析在随机控制，最优停止以及数理金融方面的应用可见文献 [6].

# 参考文献


1　何声武,汪家冈,严加安.半鞅与随机分析.北京:科学出版社,1995

2　Liptser R S and A N. Shiryayev Statistics of Random Processes. New York: Springer-Verlag, 1977

3　严加安.测度论讲义.北京:科学出版社,1998

4　黄志远.随机分析学基础.北京:科学出版社,2001

5　Chung. KaiLai An introduction to stochastic intergration. Birkhaser Boston, Inc, 1983

6　Bernt Øksendal Stochasstic Differential Equations. Springer-Verlag, 1995

7　J.迪厄多内.现代分析基础.北京:科学出版社,1982

8　吉田耕作.泛函分析:北京:人民教育出版社,1980

9　王梓坤.随机过程通论.北京:北京师范大学出版社,1995

10　金治明.一类随机微分方程的解法.长沙:湖南数学年刊,vol. 5, No. 1, 1985

11　Olav Kallenberg. Foundations of modern probability. 北京:科学出版社 & Springer(影印版),2001

12　R. Tyrrell Rockafellar. Convex Analysis. Princeton, 1970

13　N. Kazamaki. The equivalence of two conditions on Weighted norm inequalities for martingales. Proc. Inter. Symp. SDE Kyoto, 1976

14　Ito and Mckean, Diffusion processes and their sample paths. Berlin, 1965

15　T. Yamada and S. Watanabe. On the uniquenessof solution of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto. 11, 155-167, 1971

# 索　引

## BC



## D



## FGH



## I

## J



## L



## MN



## OPQ

## RST



## WX



## Y



## Z